

**Alma Mater Studiorum  
Università degli Studi di Bologna**

---

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

Dipartimento di Astronomia dell'Università di Bologna

**Instabilità Magnetorotazionale  
nei dischi di Accrescimento**

Tesi di Laurea di:  
**Francesco Trotta**

Relatore:  
**Prof. Luca Ciotti**

Co-Relatore:  
**Dott. Pasquale Londrillo**



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>1</b>
<b>1 DISCHI ASTROFISICI E PROBLEMA DELLA VISCOSITÀ ANOMALA</b>	<b>5</b>
1.1 Accrescimento come sorgente di energia . . . . .	5
1.2 Dischi di accrescimento in astrofisica . . . . .	9
1.2.1 Dischi protostellari . . . . .	9
1.2.2 Stelle binarie interagenti . . . . .	10
1.2.3 Nuclei galattici attivi . . . . .	11
1.2.4 Altri dischi astrofisici . . . . .	12
1.3 Gli agenti responsabili del trasporto del momento angolare . . .	12
1.4 Storia e progressi nella comprensione della sorgente della viscosità anomala . . . . .	14
1.5 Turbolenza MHD . . . . .	16
<b>2 DESCRIZIONE CINETICA E FLUIDA DEI PLASMI</b>	<b>19</b>
2.1 Parametri caratteristici dei plasmi . . . . .	19
2.2 Modelli fisici per lo studio dei plasmi . . . . .	22
2.2.1 I modelli cinetici . . . . .	23
2.2.2 Il modello a due fluidi . . . . .	24
2.2.3 Il modello magnetoidrodinamico . . . . .	25
2.3 Leggi di conservazioni MHD . . . . .	27
2.4 Onde lineari in regime MHD ideale . . . . .	30
2.4.1 Onde magnetiche . . . . .	33
2.4.2 Onde magnetosoniche . . . . .	35
2.5 Equazioni MHD ideale in coordinate cilindriche . . . . .	36

<b>3</b>	<b>MODELLI DI EQUILIBRIO DI UN DISCO IN ROTAZIONE</b>	<b>39</b>
3.1	Stati di equilibrio di un plasma ideale . . . . .	39
3.2	Disco di accrescimento toroidale . . . . .	41
3.2.1	Disco di accrescimento toroidale con $\beta \gg 1$ . . . . .	41
3.2.2	Disco di accrescimento toroidale con $\beta \lesssim 1$ . . . . .	46
3.3	Disco di accrescimento sottile - Equilibrio kepleriano . . . . .	49
3.3.1	Stratificazione verticale del disco sottile - Modelli politropici . . . . .	51
<b>4</b>	<b>STABILITÀ LINEARE IDRODINAMICA</b>	<b>53</b>
4.1	Concetto di Instabilità . . . . .	53
4.2	Stabilità di sistemi in rotazione differenziale . . . . .	54
4.3	Analisi di stabilità lineare . . . . .	55
4.4	Analisi locale . . . . .	58
4.5	Criterio di Solberg-Høiland . . . . .	59
<b>5</b>	<b>STABILITÀ LINEARE MAGNETOIDRODINAMICA</b>	<b>63</b>
5.1	Instabilità magnetorotazionale . . . . .	63
5.1.1	Calcolo formale . . . . .	63
5.1.2	Descrizione qualitativa . . . . .	66
5.2	Analisi di stabilità lineare . . . . .	67
5.3	Criterio di stabilità generale assisimmetrico . . . . .	75
<b>6</b>	<b>ESPERIENZA NUMERICA SULLA STRUTTURA E STA-</b> <b>BILITÀ DEI DISCHI DI ACCRESCIMENTO</b>	<b>77</b>
6.1	Caratteristiche delle equazioni di Eulero . . . . .	78
6.2	Discretizzazione spaziale delle equazioni 1D . . . . .	79
6.2.1	La ricostruzione MUSCL . . . . .	82
6.2.2	Avanzamento temporale . . . . .	82
6.2.3	Stabilità numerica della integrazione temporale . . . . .	83
6.3	Codice e risultati . . . . .	83
	<b>Conclusioni</b>	<b>84</b>
	<b>Appendice</b>	<b>90</b>

---

<b>A Dal modello cinetico al modello a un fluido in regime MHD per un plasma collisionale</b>	<b>91</b>
A.1 Modello a due fluidi per un plasma collisionale . . . . .	91
A.2 Modello a un fluido in regime MHD . . . . .	95
<b>Appendice</b>	<b>100</b>
<b>B Metodo dei modi normali</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>105</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>105</b>



# Sommario

I processi di accrescimento da disco producono alcuni dei più energetici fenomeni osservati in astrofisica. L'energia rilasciata deriva essenzialmente dalla caduta del gas nel potenziale gravitazionale del corpo centrale che a sua volta può essere mantenuta su tempi lunghi solo in presenza di qualche meccanismo che trasferisca all'esterno il momento angolare del disco.

Il problema centrale nella teoria dei dischi di accrescimento è quello di individuare la natura dinamica di questo meccanismo, tenuto conto che la viscosità molecolare del gas astrofisico è generalmente trascurabile.

La riscoperta della instabilità di un fluido magnetizzato in rotazione differenziale, o magnetorotazionale (MRI) da parte di Balbus e Hawley (1991), ha permesso di aprire un nuovo campo di indagine per la comprensione piena dei processi di accrescimento. L'analisi lineare di questa instabilità e lo studio numerico della sua evoluzione non lineare (Hawley, Gammie & Balbus 1995, 1996; Hawley 2000, 2001) hanno mostrato che l'evoluzione non-lineare della MRI dà origine a turbolenza e che questa, a sua volta, porta a un trasporto anomalo di momento angolare verso l'esterno.

In questo lavoro abbiamo studiato gli aspetti propedeutici ad una comprensione più approfondita di questo campo di indagine. Per questo, dopo una breve descrizione di alcuni sistemi astrofisici che presentano al loro interno la struttura di disco e del problema della viscosità anomala legato al trasporto del momento angolare (capitolo 1), abbiamo anzitutto rivisto le condizioni sotto le quali il gas presente in un disco di accrescimento può essere descritto dalle equazioni di Eulero e quindi dalle equazioni MHD nel caso di presenza di un campo magnetico (capitolo 2). Utilizzando tali equazioni in coordinate cilindriche, sono stati studiati modelli semplici di equilibrio di un disco toroidale in rotazione attorno ad una massa centrale Newtoniana (capitolo 3). Una parte estesa dello studio è stata dedicata all'analisi di stabilità lineare ed ad un approfondimento delle tecniche analitiche e numeriche per la soluzione

delle equazioni lineari (capitolo 4-5). Nel capitolo 6, infine, abbiamo avviato lo studio numerico per l'evoluzione non lineare di un modello di equilibrio perturbato, avvalendoci di un codice (ECHO) già disponibile. Questo studio è stato perciò finalizzato soprattutto alla acquisizione di alcuni aspetti numerici e tecnici della struttura del codice. Chiudono questo lavoro l'Appendice A dove viene presentato un calcolo dettagliato di come si arriva dal modello cinetico al modello a un fluido in regime MHD per un plasma collisionale e l'Appendice B dove viene presentato il metodo dei modi lineari utilizzato per l'analisi di stabilità lineare.

# Capitolo 1

## DISCHI ASTROFISICI E PROBLEMA DELLA VISCOSITÀ ANOMALA

Iniziamo il nostro lavoro di tesi discutendo dell'energetica del processo di accrescimento, prima nel caso di accrescimento sferico e poi nel caso più realistico di accrescimento da disco. Da questa breve discussione notiamo come, nel caso in cui il corpo massivo centrale sia un oggetto compatto (stella di neutroni o buco nero), il processo di accrescimento è più efficiente dei processi di fusione termonucleare e quindi sembra essere il più adatto per spiegare l'emissione di sorgenti ad alta energia. Poi, dopo una breve descrizione di alcuni sistemi astrofisici che presentano al loro interno la struttura di disco, discutiamo del problema della viscosità anomala legato al trasporto del momento angolare. Ripercorriamo la storia e i progressi fatti nella comprensione di questo problema e infine concludiamo che l'ipotesi più consistente è che la sorgente del trasporto sia la turbolenza magnetoidrodinamica

### 1.1 Accrescimento come sorgente di energia

L'accrescimento in astrofisica è semplicemente il processo con cui della materia cade su un oggetto massivo centrale. Questo processo, nel caso in cui l'oggetto centrale è un *oggetto compatto*, risulta essere il processo fisico più efficiente per la produzione di energia e pertanto viene invocato per spiegare l'emissione di sorgenti ad alta energia sia su scala stellare (stelle binarie interagenti) che su scala galattica (nuclei galattici attivi). Vediamo ora brevemente quanta energia viene rilasciata dal processo di accrescimento dapprima nel caso di accrescimento sferico e poi nel caso più realistico di accrescimento da disco.

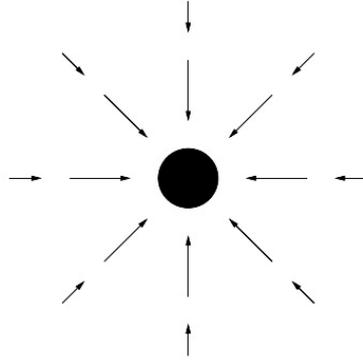


Figura 1.1: Accrescimento Sferico

Supponiamo che un oggetto sferico di massa  $M$  e raggio  $R_*$  sia collocato in un mezzo gassoso statico e uniforme. Ogni singolo elemento del mezzo comincerà a cadere radialmente sotto l'azione gravitazionale del corpo centrale. Questo tipo di accrescimento è detto *accrescimento sferico* o *accrescimento di Bondi* (figura 1.1). L'energia cinetica acquisita durante la caduta viene trasformata in calore quando il gas urta contro la superficie del corpo centrale e si arresta. Il gas, così scaldato, emette energia sotto forma di radiazione, raffreddandosi. Per il *principio di conservazione dell'energia*, la radiazione emessa è pari al lavoro compiuto dalla gravità per spostare il gas da una grande distanza fino alla superficie. Questo lavoro, com'è noto, è pari all'energia potenziale calcolata al raggio  $R_*$ , e quindi l'energia irradiata a seguito del processo di accrescimento è pari a

$$\Delta E_{acc} = \frac{GM\Delta m}{R_*} = \left( \frac{R_S}{2R_*} \right) \Delta mc^2 = \eta \Delta mc^2 \quad (1.1)$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale,  $c$  è la velocità della luce e  $\Delta m$  è la massa di gas caduta. La formula è stata riscritta in termini del raggio di Schwarzschild  $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ , una lunghezza caratteristica che si associa agli oggetti gravitanti, e l'espressione risultante esprime l'energia irradiata in termini dell'energia a riposo  $\Delta mc^2$  della massa caduta. Il parametro  $\eta = \left( \frac{R_S}{2R_*} \right)$  rappresenta quindi l'efficienza di conversione di questa energia in radiazione cioè ci dice quanta parte dell'energia a riposo del gas in caduta viene irraggiata.

In termini del *tasso di accrescimento*,  $\dot{m} = \Delta m / \Delta t$ , ovvero la quantità di gas che cade nell'unità di tempo, si ottiene la *luminosità di accrescimento*  $L_{acc} = \Delta E_{acc} / \Delta t$ , ovvero l'energia emessa nell'unità di tempo

$$L_{acc} = \frac{GM\dot{m}}{R_*} = \eta \dot{m} c^2 \quad (1.2)$$

In base alla definizione di efficienza data, si vede chiaramente che questa dipende dalla compattezza dell'oggetto che accresce: più grande è il rapporto  $M/R_*$ , più grande è l'efficienza. Vediamo ora di quantificare l'efficienza  $\eta$  in vari contesti astrofisici confrontando il risultato con l'efficienza delle *reazioni di fusione nucleare*, in particolare consideriamo la reazione di fusione tra protoni e neutroni che porta alla conversione di idrogeno in elio e che possiede la più alta efficienza tra le reazioni di fusione ( $\eta = 0.007$ ).

Per una *nana bianca* ( $M \approx M_\odot \approx 2 \times 10^{33}$  g,  $R_* \approx 5000$  Km =  $5 \times 10^8$  cm) si ottiene  $\eta = 0.0003$  e la fusione nucleare è più efficiente dell'accrescimento di un fattore 25 – 50. Per una *stella di neutroni* ( $M \approx M_\odot$ ,  $R_* \approx 10$  Km =  $10^6$  cm)  $\eta = 0.1$  e l'accrescimento diventa una sorgente di energia più efficiente della fusione nucleare. Sembrerebbe che valori ancora maggiori di  $\eta$  possono ottenersi nel caso in cui l'oggetto centrale sia un *buco nero*. Il buco nero, infatti, è l'oggetto più compatto che si possa immaginare, dal momento che le sue dimensioni sono inferiori al raggio di Schwarzschild. Le cose, tuttavia, sono più complesse. Al di là del raggio di Schwarzschild tutto viene inghiottito dal buco nero e scompare alla vista, giacché neanche la luce è in grado di uscire. In assenza di una superficie 'solida' contro cui sbattere e riscaldarsi, il gas in caduta diretta verso un buco nero sembra dunque destinato a scomparire con la sua energia cinetica senza avere modo di irraggiare.

L'energetica del processo di accrescimento visto fin qui si applica come abbiamo visto quando il gas in accrescimento ha un momento angolare nullo o trascurabile ma nella realtà i flussi di accrescimento tendono a formare una struttura ruotante e appiattita. Infatti, anche se inizialmente il gas della nube che avvolge l'oggetto centrale è dotato di velocità di rotazione molto bassa, man mano che la nube si contrae, la rotazione aumenta per il *principio di conservazione del momento angolare* (figura 1.2(a)). Ne consegue che in vicinanza del centro il gas, a causa della rotazione, non accresce sull'oggetto centrale sfericamente da ogni direzione, ma forma un *disco di accrescimento* e si avvicina al centro spiraleggiando (figura 1.2(b)).

In questo caso, a differenza di prima, dobbiamo tener conto che la sua energia potenziale viene trasformata per metà in energia cinetica di caduta (e conseguentemente in calore e infine in radiazione) e per metà in energia cinetica di rotazione. Quando abbiamo a che fare con un buco nero un elemento di fluido trasformerà solo la metà di energia cinetica di caduta in calore e poi

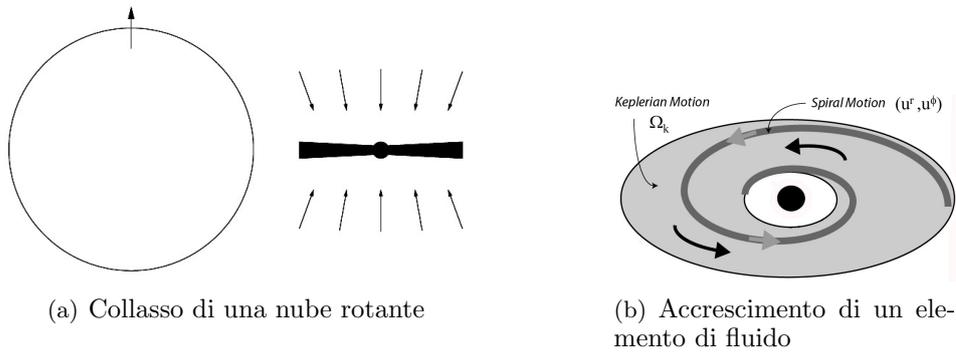


Figura 1.2: Accrescimento da Disco

in radiazione poichè l'altra metà (energia cinetica di rotazione) viene persa assieme al gas al di là del raggio di Schwarzschild. Si ha dunque:

$$L_{acc}(BH) = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{m}}{R_*} \quad (1.3)$$

Tuttavia in questo caso per un calcolo accurato dell'efficienza  $\eta$  bisogna tener conto di un effetto tipicamente relativistico. Nonostante che il 'punto di non ritorno' per un oggetto in caduta verso un buco nero sia dato effettivamente da  $R_s$ , l'ultima orbita stabile per un oggetto che spiraleggia ha un raggio pari a  $3R_s$ . A questa distanza la gravità prevale in maniera drammatica e il materiale raggiunge  $R_s$  in caduta libera, impiegando appena  $10^{-4}s$ , e quindi non avendo modo di irradiare granchè prima di scomparire al di là del raggio di Schwarzschild. Sostituendo dunque  $3R_s$  al posto di  $R_*$  nella definizione di efficienza e tenendo conto dell'equazione (1.3) si ottiene per un buco nero  $\eta = 0.08$ . Dunque, nonostante la sua compattezza, un buco nero ha un'efficienza simile a quella di una stella di neutroni.

Tuttavia, i buchi neri hanno particolare importanza per due motivi. Inanzitutto, l'efficienza appena calcolata vale per un buco nero statico; ma un buco nero in rotazione produce orbite stabili a distanze inferiori a  $3R_s$  e l'efficienza può arrivare a  $\eta = 0.43$ . Inoltre, contrariamente alle stelle di neutroni, possono esistere buchi neri con masse pari a milioni di volte quella del Sole e dunque in grado di accrescere grandi quantità di materia e irradiare luminosità enormi. Si ritiene che la sorgente energetica degli AGN consista proprio nell'accrescimento su simili buchi neri.

La maggior parte dei flussi di accrescimento in astrofisica sono rapidamente ruotanti ed uno dei problemi centrali è come rimuovere il momento

angolare così che l'accrescimento può avvenire. Un disco di accrescimento è un flusso che realizza questo trasporto verso l'esterno di momento angolare.

## 1.2 Dischi di accrescimento in astrofisica

I dischi di accrescimento sono delle strutture molto comuni nell'universo. Essi infatti si trovano intorno a molti differenti tipi di oggetti e su scale molto diverse: oggetti stellari giovani (dischi protostellari), stelle binarie interagenti, nuclei galattici attivi (AGN) e poi anche galassie a spirali, anelli planetari, e binarie compatte. Diamo qui una breve descrizione di questi sistemi. I numeri citati qui provengono dalle reviews di (Lin and Papaloizou - 1996) e sono stime grossolane di ordini di grandezza, giusto per prendere confidenza con i differenti sistemi.

### 1.2.1 Dischi protostellari

Dalla rivoluzione Copernicana abbiamo capito che tutti i pianeti del sistema solare orbitano intorno al Sole nello stesso senso e quasi nello stesso piano. Nel diciottesimo secolo Kant e Laplace riconobbero che i pianeti condensano da una nube di gas appiattita che ruota intorno al sole nello stato iniziale della sua vita. I loro modelli di *nebulosa solare* introdussero il concetto di *disco protoplanetario*.

Dal 1995, il telescopio spaziale Hubble ha fornito immagini di tali dischi intorno a giovani stelle nella nebulosa di Orione, una vicina regione di formazione stellare. Sia che essi formino o no i pianeti, tali dischi sono conosciuti essere una parte essenziale del processo di formazione stellare (sono spesso chiamati *dischi protostellari*). Essi sono composti da gas relativamente freddo, principalmente  $H_2$  insieme con della polvere e si pensa che sopravvivono per pochi milioni di anni.

Si pensa che, durante quel periodo, i pianeti si siano formati come agglomerati di polvere in corpi successivamente più grandi, eventualmente formando i nuclei rocciosi dei pianeti. Per formare i pianeti giganti gassosi come Giove, il nucleo deve in seguito accrescere un sostanziale involuppo gassoso dal disco che lo circonda.

Dal 1995 più di 100 pianeti sono stati scoperti intorno a stelle vicine simili al sole. Poichè una stella con un pianeta effettua una più piccola orbita intorno al centro di massa del sistema, il suo moto da origine a un rilevabile

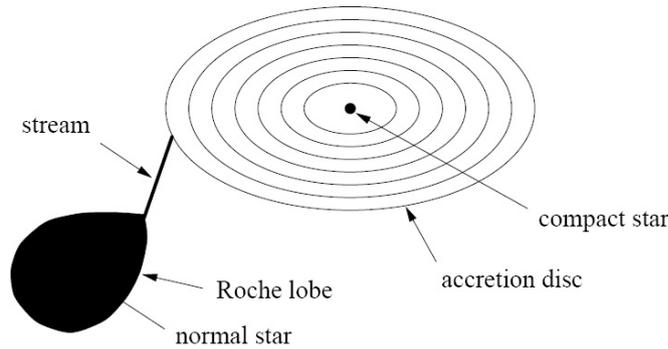


Figura 1.3: Disco di accrescimento in stelle binarie interagenti

spostamento Doppler periodico delle sue linee spettrali.

**Parametri tipici:** Molti dei valori dei loro parametri sono paragonabili a quelli del nostro sistema solare come la dimensione tipica (100 AU), la massa della stella centrale ( $1M_{\odot}$ ) e la velocità Kepleriana ( $v_K = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 10 \text{ Km/s}$ ). Le temperature osservate sono dell'ordine di 100 K da cui è possibile stimare lo spessore del disco. La massa del disco varia nel tempo, inizialmente è comparabile a quella della stella centrale e alla fine del processo di accrescimento è trascurabile come nel nostro sistema solare. Il tasso di accrescimento in quiescenza è dell'ordine di  $10^{-8}M_{\odot}/\text{anno}$  ma può raggiungere valori più grandi dell'ordine di  $10^{-4}M_{\odot}/\text{anno}$  durante l'autbursts.

### 1.2.2 Stelle binarie interagenti

Molte stelle si formano in sistemi binari. La più massiva, la stella 'primaria', evolve più rapidamente e, se abbastanza massiva, raggiunge la fine della sua vita come oggetto compatto: *nana bianca*, *stella di neutroni* o *buco nero*. A questo punto la stella secondaria si può trovare nella fase evolutiva di sequenza principale. Se l'orbita binaria è sufficientemente stretta, la stella secondaria può superare la sua *superficie equipotenziale critica* o *lobo di Roche*, e trasferire gas verso la sua compagna compatta (figura 1.3). Per effetto della sua rotazione nell'orbita binaria, il gas trasferito ha troppo momento angolare per cadere direttamente sulla superficie del primario e pertanto si viene a formare un *disco di accrescimento* attorno ad esso. Sotto l'azione della viscosità all'interno del disco, il gas gradualmente perde momento angolare e spiraleggia verso l'interno per essere accresciuto dall'oggetto centrale.

Sistemi che hanno una nana bianca come primaria sono conosciuti come *Variabili Cataclismiche* poichè molti di loro esibiscono intensi outbursts. Questi includono le *Novae classiche*, nelle quali uno strato accresciuto sulla primaria accende in un runaway term nucleare e le *Novae nane* nel quale outbursts avvengono ciclicamente nel disco stesso.

Sistemi che hanno una stella di neutroni o un buco nero come primario sono conosciuti come *Binarie X*.

**Parametri tipici:** Prendiamo come standard di questa categoria le Variabili Cataclismiche che si conoscono abbastanza bene. La dimensione del disco è un pò meno di  $R_{\odot}$  mentre la massa della stella centrale è dell'ordine di  $1M_{\odot}$  che dà una velocità Kepleriana di qualche migliaia di km/sec. La massa del disco è trascurabile rispetto a quella della stella centrale. La temperatura centrale è tipicamente di 10000 K che da un rapporto altezza raggio di 0.02. Il tasso di accrescimento è dell'ordine di  $10^{-8}M_{\odot}/\text{anno}$  o un fattore 100 più basso nelle Novae Nane in quiescenza.

### 1.2.3 Nuclei galattici attivi

È ora generalmente accettato che molte galassie contengono un *buco nero supermassivo* al centro. Alcune di queste galassie hanno *nuclei galattici attivi* (AGNs). Gli AGN sono luminose in tutte le bande e raggiungono enormi luminosità, fino a  $10^{47}$  ergs  $s^{-1}$ .

Il modello standard degli AGN include un disco di accrescimento intorno al buco nero, il quale fornisce la sorgente di energia e permette al buco di crescere. Gli AGN possono rappresentare una fase temporanea nell'evoluzione galattica che si presenta quando il gas è reso disponibile per essere accresciuto dal nucleo. Il moto orbitale del gas nei dischi di accrescimento può essere tracciato attraverso lo spostamento doppler delle linee spettrali, e questo permette una misura della massa del buco nero

**Parametri tipici:** La dimensione dei dischi osservati è decine di parsec, mentre al centro c'è un buco nero massiccio ( $10^9M_{\odot}$ ). La velocità Kepleriana va da centinaia Km/sec nelle parte esterna del disco a migliaia Km/sec nella parte interne. Con una temperatura di  $10^4$  K il rapporto altezza raggio diventa  $10^{-2}$ . Il tasso di accrescimento è dell'ordine di  $1M_{\odot}/\text{anno}$

### 1.2.4 Altri dischi astrofisici

Ci sono ancora altri esempi di dischi in astrofisica. Le *galassie a spirali* sono dischi composti da gas e stelle. Questi differiscono dai dischi di accrescimento poichè sono fortemente autogravitanti e non dominati dal black hole centrale. Le stelle hanno un lungo libero cammino medio e costituiscono un sistema non collisionale piuttosto che un fluido.

Gli *anelli planetari* sono dischi molto sottili composti da corpi solidi (ghiaccio e roccia di diversi metri di dimensione) che subiscono frequenti collisioni. Questi condividono alcune proprietà dinamiche con i dischi di accrescimento gassosi, ma risentono molto dell'influenza gravitazionale dei satelliti del pianeta, i quali 'guidano' l'anello e producono all'interno di esso vari tipi di sottili strutture.

Alcuni scenari di evoluzione dei sistemi binari portano alla formazione di *binarie compatte* cioè sistemi binari che coinvolgono ad esempio due nane bianche, o una stella di neutroni e un black hole in un'orbita molto stretta. Gli oggetti spiraleggiano verso l'interno man mano che l'energia e il momento angolare vengono persi dall'emissione di onde gravitazionali. Tali sistemi (più probabilmente quelli che coinvolgono una stella di neutroni e un black hole) sono ritenuti essere i responsabili delle potenti esplosioni conosciute come *gamma-ray bursts*

## 1.3 Gli agenti responsabili del trasporto del momento angolare

Il processo di accrescimento da disco, come abbiamo visto, è una potente sorgente di energia per vari oggetti astrofisici ed avviene se la materia del disco perde momento angolare. La quantità di materia che cade dipende dal tasso con la quale il momento angolare viene estratto da ciascun elemento di fluido orbitante e trasportato verso l'esterno. Vediamo qui brevemente quali sono gli agenti responsabili che regolano il trasferimento di momento angolare verso l'esterno e che quindi consentono l'accrescimento di massa.

Gli agenti responsabili del trasporto del momento angolare possono essere trovati nell'*equazione della conservazione del momento angolare*. Questa si ottiene moltiplicando per  $R$  la componente azimutale dell'equazione del moto

(Balbus, S.A., & Hawley, J.F., 1998):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\ell) = -\nabla \cdot \mathcal{F}_\ell \quad (1.4)$$

dove il flusso di momento angolare è

$$\mathcal{F}_\ell = \underbrace{\rho\ell\mathbf{u}}_{\text{termine avvevivo}} - \underbrace{R\left(\frac{B_\phi}{4\pi}\mathbf{B}_p\right)}_{\text{stress di Maxwell}} + \underbrace{R\left(P + \frac{B_p^2}{8\pi}\right)\mathbf{e}_\phi}_{\text{pressioni del gas e di B}} - \underbrace{\left[\frac{R\nu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{e}_\phi + \nu R^2\nabla\frac{v_\phi}{R}\right]}_{\text{stress viscoso}} \quad (1.5)$$

Abbiamo indicato con  $\rho$  la densità di massa, con  $\ell = Rv_\phi$  il momento angolare specifico, con  $B_p$  la componente poloidale del campo magnetico ( $B_p^2 = B_R^2 + B_z^2$ ), con  $\nu$  la viscosità cinematica e con  $\mathbf{e}_\phi$  il vettore unitario nella direzione  $\phi$ . Si noti che non ci sono termini di sorgente in questa equazione e pertanto il momento angolare non può essere mai distrutto ma solo redistribuito nel fluido. L'equazione (1.4) mostra che il trasporto di momento angolare può essere compiuto in numero relativamente limitato di modi:

1. il primo termine di flusso è il *trasporto avvevivo* di  $\ell$  cioè il trasporto del momento angolare compiuto dal campo di velocità  $\mathbf{u}$ .
2. il secondo termine è lo *stress di Maxwell* che costituisce una diretta *torsione magnetica* sull'elemento di fluido.
3. i successivi due termini rappresentano i *gradienti di pressione* azimutale idrodinamico e magnetico.
4. l'ultimo termine è il trasporto di  $\ell$  attraverso lo *stress viscoso*.

Il problema con questo ultimo termine è che la viscosità molecolare è molto piccola nei dischi di accrescimento e il trasferimento di momento angolare verso l'esterno prodotto dovuta alla *viscosità molecolare* non sarebbe abbastanza per spiegare il tasso di accrezione osservati. Per fissare le idee, detta  $\nu$  la viscosità cinematica si ha che un perturbazione è propagata dalla diffusione viscosa su una distanza  $l$  su un tempo scala dell'ordine di  $l^2/\nu$  che è circa  $3 \times 10^7$  anni per  $l = 10^{10}$  cm e  $\nu = 10^5$  cm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>. Questo è ordini di grandezza troppo grandi per il tempo di variabilità osservato nei dischi di accrescimento in oggetti compatti.

Per valutare se gli effetti viscosi possono essere trascurati si considera il *numero di Reynolds* che misura il 'peso' degli effetti inerziali rispetto agli effetti viscosi. Tale quantità (adimensionale) è data dal rapporto delle scale di

velocità  $U$  e di lunghezza  $L$  caratteristiche del flusso in esame sulla viscosità cinematica  $\nu$

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.6)$$

Nei dischi, la lunghezza e la velocità caratteristica sono rispettivamente la scala di altezza verticale  $H$  e la velocità orbitale  $R\Omega$  e il numero di Reynolds è pertanto enorme. Nei flussi con alti numero di Reynolds il contributo viscoso alla divergenza del flusso di momento angolare è generalmente trascurabile e questa è, naturalmente, la ragione per cui i dischi hanno bisogno di una *viscosità anomala*. Data l'irrelevanza del trasporto viscoso del momento, in che modo allora il momento angolare viene perso da un dato elemento di fluido e trasportato verso l'esterno?

Ci sono molte situazioni terrestri dove flussi con alti numeri di Reynolds sono turbolenti. Un flusso turbolento è caratterizzato dall'interazione di vortici su tutte le scale nel sistema attraverso il quale si ha un trasferimento a cascata dell'energia dalle scale più grandi del moto verso quelle sempre più piccole fino alle scale dissipative dove la viscosità trasforma tutta l'energia in calore. L'effetto della turbolenza è quella di avere un fluido con una più alta viscosità effettiva ( $\nu = \nu + \nu_T$  dove  $\nu_T$  è detta viscosità turbolenta) e questo sua volta produce un più efficiente trasporto di tutte le grandezze fisiche.

Nei dischi di accrescimento, la presenza di turbolenza potrebbe quindi spiegare il trasporto anomalo del momento angolare. Se i dischi infatti sono turbolenti, il numero di Reynold effettivo turbolento potrebbe facilmente essere tale da guidare l'accrescimento ai tassi richiesti dalle osservazioni.

## 1.4 Storia e progressi nella comprensione della sorgente della viscosità anomala

Già dai primi studi sui dischi di accrescimento si sapeva che la sola viscosità molecolare non poteva spiegare le proprietà osservative degli oggetti che accrescono e che un moto turbolento poteva essere la chiave per risolvere il problema del trasporto del momento angolare.

Uno tra i primi più influenti articoli sui dischi è stato Shakura & Sunyaev (1973). Qui il problema del trasporto del momento angolare è stato affrontato assumendo una indeterminata combinazione di stress magnetico e turbolento (la turbolenza era assunta essere di natura idrodinamica). Shakura & Sunyaev

affermavano che mentre i campi magnetici dovevano certamente essere presenti (sebbene con intensità sconosciuta), la presenza di turbolenza poteva solo essere assunta. La turbolenza infatti, anche in un flusso con un alto numero di Reynolds, richiede una sorgente (es. un'instabilità) e il problema è che flussi idrodinamici in rotazione differenziale, con un momento angolare che cresce col raggio, come succede per un disco Kepleriano ( $\ell \sim R^{1/2}$ ), sono stabili localmente rispetto a una perturbazione lineare “*criterio di Rayleigh*”. Comunque, siccome i dischi di accrescimento esistono e la turbolenza è la più ragionevole proposta per il meccanismo di trasporto di momento angolare Shakura & Sunyaev sostenevano che delle sorgenti di turbolenza devono essere presenti e proposero come candidato l'instabilità non-lineare del tipo osservato in un semplice flusso di shear.

Qualunque sia la sorgente della turbolenza e qualunque sia la forma dello stress risultante, la sua intensità dovrebbe essere legata alle scale fisiche principali all'interno del disco, come la velocità di rotazione  $\Omega$ , l'altezza scala di pressione verticale  $H$  e la velocità del suono  $v_s$ . In questo modo Shakura & Sunyaev introdussero la *parametrizzazione*  $\alpha$  per lo stress di shear  $W_{R\phi}$

$$W_{R\phi} \sim \rho v_s^2 \left( \frac{v_T}{v_s} \right) + \rho v_s^2 \left( \frac{B^2}{4\pi\rho v_s^2} \right) = \alpha \rho v_s^2 \quad (1.7)$$

dove  $v_T$  è la tipica velocità turbolenta. La parametrizzazione  $\alpha$  di Shakura & Sunyaev ha permesso sostanziali progressi sulla conoscenza dei dischi di accrescimento.

Lynden-Bell & Pringle (1974) adottarono nei loro studi un approccio leggermente differente assumendo semplicemente una viscosità anomala  $\nu_T$  e un trasporto di momento angolare proporzionale a  $\nu_T$  volte il tasso di shear. Questa loro assunzione può essere legato a quello di Shakura-Sunyaev ponendo  $\nu_T = \alpha v_s H$  come mostrato da Pringle (1981).

Negli anni successivi a questi primi lavori sui dischi caratterizzati da un trasporto turbolento, si era creata una tendenza a considerare la sorgente di viscosità come conosciuta (la viscosità è data da  $\alpha$ !). Ci sono stati animati dibattiti su come (e se)  $\alpha$  varia con il tempo, raggio del disco e legge di rotazione e c'erano disaccordi su quale era la corretta forma della legge di  $\alpha$ . Queste discussioni potevano andar bene finchè erano motivate dalle osservazioni dei dischi, ma in assenza di una teoria fisica di base per trasporto del momento angolare un'analisi teoricamente dettagliata di  $\alpha$  e il significato delle dipendenze

funzionali è un pò problematica. La parametrizzazione  $\alpha$  non è una relazione che esprime un principio fisico. Il ruolo di *alpha* è simile a quello di qualsiasi altro parametro adimensionale che caratterizza un flusso fluido, come il numero di Reynolds o il numero di Taylor: esso dà il rapporto tra il trasporto effettivo e le scale fisiche caratteristiche nei dischi.

Recentemente sono stati fatti progressi sulla comprensione della fisica del trasporto in dischi in rotazione differenziale. Ora sappiamo che la sorgente del trasporto, come avevano anticipato i pionieri del campo, è dovuta alla turbolenza e al campo magnetico e in più si è capito che queste due cause non sono separate tra di loro: il trasporto è dovuto a una *turbolenza magneticamente guidata*.

## 1.5 Turbolenza MHD

Oggi si crede che la viscosità nei dischi di accrescimento risulti dalla *turbolenza magnetoidrodinamica*. Ma perchè la turbolenza MHD riesce dove fallisce quella idrodinamica? La ragione è che un fluido in rotazione differenziale magneticamente ben accoppiato è soggetto, qualora la sua velocità angolare decresce verso l'esterno, ad una potente instabilità di shear locale, conosciuta come *instabilità magnetorotazionale o MRI*.

L'instabilità magnetorotazionale è stata scoperta da Velikhov(1959) nel contesto di un flusso di Couette magnetizzato verticalmente tra cilindri che ruotano differenzialmente. La sua analisi fu poi generalizzata da Chandrasekhar(1960). Le prime applicazioni astrofisiche furono fatte da Fricke(1969) e Acheson(1978) a stelle in rotazione differenziale contenenti un campo magnetico. L'instabilità è anche apparsa in studi geofisici nello studio degli interni planetari. Comunque, la più ovvia applicazione ai dischi di accrescimento fu trascurata fino al lavoro di Balbus & Hawley (1991), più di 30 anni dopo la sua scoperta, quando mostrarono che deboli campi magnetici possono sostanzialmente alterare il criterio di stabilità nei dischi di accrescimento. Evidentemente il risultato di Velikhov-Chandrasekhar è stato ampiamente trascurato o incompreso.

L'instabilità MRI è un' instabilità *locale e lineare* cioè sono richieste piccole perturbazioni intorno allo stato di equilibrio per farla nascere, la sua esistenza è inoltre indipendente sia dall'intensità del campo magnetico che dall'orientazione e il tasso di crescita è comparabile al tasso di shear del flusso. Date

---

queste proprietà, questa instabilità è rilevante per lo studio dei dischi di accrescimento poiché può fornire una spiegazione per il trasporto del momento angolare che è richiesto dalle osservazioni. Infatti, una varietà di simulazioni numeriche locali (Hawley, Gammie & Balbus 1995, 1996) e globali (Hawley 2000, 2001) hanno mostrato che l'evoluzione non-lineare della MRI dà origine ad uno stato turbolento caratterizzato da uno stress di Reynolds e Maxwell aumentato che porta a un più efficiente trasporto del momento angolare verso l'esterno. Questo risultato potrebbe quindi spiegare i tassi di accrescimento osservati e quindi il riscaldamento dei dischi e la corrispondente emissione di radiazione



## Capitolo 2

# DESCRIZIONE CINETICA E FLUIDA DEI PLASMI

Se il gas di un disco di accrescimento è abbastanza caldo da essere ionizzato (cioè diventare plasma), esso sarà dinamicamente influenzato dal campo magnetico e inoltre potrà influenzare l'evoluzione del campo magnetico. In questo lavoro ci mettiamo in questa situazione, cioè studiamo la dinamica di un fluido in rotazione differenziale intorno ad un corpo massivo centrale abbastanza ionizzato (quindi perfettamente conduttore) e non auto-gravitante.

Data la natura del sistema che vogliamo studiare, questo capitolo lo dedichiamo ad illustrare alcuni concetti basilari della fisica del plasma, in particolare daremo una breve descrizione dei parametri caratteristici dei plasmi, ricaveremo e analizzeremo le equazioni magnetoidrodinamiche che vengono generalmente utilizzate per studiarli, li riscriveremo poi in forma conservativa da cui è più direttamente visibile come queste esprimano i principi di conservazione della massa, del momento, dell'energia e del flusso magnetico e infine vedremo come un plasma in un campo magnetico supporti diversi tipi di onde lineari.

### 2.1 Parametri caratteristici dei plasmi

Un plasma, e in particolare nel nostro caso un gas ionizzato, è un sistema costituito da cariche elettriche libere di muoversi. Le particelle del plasma pertanto, generano densità di carica  $q$  e densità di corrente  $\mathbf{J}$  che a loro volta generano campi elettrici  $\mathbf{E}$  e campi magnetici  $\mathbf{B}$  e questi determinano la dinamica del sistema.

Viene a questo punto naturale chiedersi quale debba essere il grado di ionizzazione di un gas per poterlo considerare plasma. Una caratteristica dei

plasmi è quella di avere un *elevata conducibilità elettrica*. Da un semplice calcolo della conducibilità elettrica  $\sigma$  di un gas parzialmente ionizzato costituito da elettroni, ioni positivi e atomi neutri, si deduce che è sufficiente un piccolo grado di ionizzazione  $\chi$  (1-10 %) per avere un elevata conducibilità e quindi considerare plasma tale gas. Inoltre il grado di ionizzazione dipende dalla temperatura e pertanto per parlare di plasma si devono avere temperature sufficientemente alte.

Un'altra caratteristica fondamentale dei plasmi è la loro abilità a mantenere uno stato di *quasi neutralità di carica*. Questo perchè le cariche in un plasma sono libere di muoversi e questo fa sì che nell'intorno di una carica positiva vi sia una rarefazione di cariche positive ed un addensamento di cariche negative, per cui la carica positiva risulta circondata da una regione a carica prevalentemente negativa. Di conseguenza a una certa distanza la carica risulta schermata. Tale distanza viene chiamata *lunghezza di Debye*  $\lambda_D$  ed è:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n_e e^2}} \simeq 6.9 T^{1/2} n_e^{-1/2} \quad (2.1)$$

Quindi, detta  $Q(r)$  la carica contenuta nella sfera di raggio  $r$  e centrata su una carica positiva, la condizione di quasi-neutralità può essere espressa da

$$Q(\lambda_D) \simeq 0 \quad (2.2)$$

E' importante sottolineare che la plausibilità degli argomenti usati per stabilire la (2.1) richiede che un grande numero di elettroni sia presente all'interno della sfera di Debye. Per questo, la condizione di quasi-neutralità può anche essere espressa da

$$n_e \lambda_D^3 \gg 1 \quad (2.3)$$

Le particelle di un plasma possiedono poi due tipi di moti: un *moto ordinato* e un *moto disordinato*. Il primo tipo di moto è causato da forti campi elettrostatici derivante anche dal più lieve sbilanciamento di carica. Questo moto genera un flusso di elettroni per ristabilire la neutralità causando oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio, dette *oscillazioni di plasma*, a una frequenza caratteristica detta *frequenza di plasma*  $\omega_p$ . Poichè lo sbilanciamento si ha su una distanze  $\lambda_D$  e la velocità caratteristica che si considera è la *velocità termica*  $v_T \simeq \sqrt{kT/m}$ , possiamo esprimere la frequenza di plasma come

$$\omega_p = \frac{v_T}{\lambda_D} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}} \quad (2.4)$$

In questa espressione compaiono sia la carica che la massa della particella considerata e quindi bisognerà distinguere la frequenza di plasma degli elettroni  $\omega_{pe}$ , da quella dei protoni  $\omega_{pp}$  e così via. Nel caso degli elettroni si ha:

$$\omega_{pe} \simeq 5.64 \times 10^4 n_e^{1/2}$$

Il moto disordinato è invece causato dalle collisioni che avvengono tra le particelle del plasma. La quantità che caratterizza tali moti è la *frequenza di collisione*. Per calcolarla bisogna tener presente che in un plasma le collisioni non vanno pensate come un singolo evento che coinvolge due sole particelle ma ogni particella, in qualunque istante, interagisce con tutte le altre all'interno della sua sfera di Debye, le collisioni nel plasma sono perciò *interazioni a molti corpi*. Senza entrare nei particolari della teoria delle interazioni a molti corpi, diamo qui semplicemente le formule risultanti. Per la frequenza di collisione elettrone-elettrone si ottiene la formula:

$$\nu_{ee} = 1.43 \frac{4\pi e^4 n_e}{m_e^{1/2} (3kT)^{3/2}} \ln \Lambda_{ee} \simeq 3.75 n_e T^{-3/2} \ln \Lambda_{ee} \quad (2.5)$$

per le collisioni tra due ioni identici di carica  $Ze$  si ha:

$$\nu_{ii} = 1.43 \frac{4\pi Z^4 e^4 n_i}{m_i^{1/2} (kT)^{3/2}} \ln \Lambda_{ii} \simeq 8.76 \times 10^{-3} n_i T^{-3/2} \ln \Lambda_{ii} \quad (2.6)$$

dove il valore numerico finale si riferisce al caso di una collisione protone-protone e infine per le collisioni elettrone-ione la teoria dà:

$$\nu_{ei} = \frac{8(6\pi)^{1/2} Z^2 e^4 m_e^{1/2} n_i}{m_i (3kT)^{3/2}} \ln \Lambda_{ei} \simeq 3.96 \times 10^{-3} n_i T^{-3/2} \ln \Lambda_{ei} \quad (2.7)$$

dove il valore numerico finale si riferisce al caso di una collisione elettrone-protone. In tutte queste espressioni è presente il termine  $\ln \Lambda$  conosciuto come *logaritmo Coulombiano* e definito da:

$$\ln \Lambda = \ln(4\pi n \lambda_D^3) \simeq 8.33 - \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{3}{2} \ln(T) \quad (2.8)$$

dove il valore numerico finale si riferisce al caso di un plasma di elettroni e protoni. Come si vede, il logaritmo Coulombiano ha una debole dipendenza dalla densità e dalla temperatura.

Le collisioni sono la causa della *termalizzazione*, cioè del processo che porta popolazioni inizialmente a temperature differenti al raggiungimento dell'equilibrio termodinamico. Durante una collisione si ha la possibilità di trasferimento di energia dalla particella più energetica a quella meno energetica. In

una collisione tra particelle di ugual massa, elettrone-elettrone o ione-ione, le energie dopo la collisione sono le stesse. Se indichiamo con  $\tau$  il tempo caratteristico in cui le popolazioni raggiungono l'equilibrio termico, avremo:

$$\tau_{ee} \simeq (\nu_{ee})^{-1} \qquad \tau_{ii} \simeq (\nu_{ii})^{-1}$$

Nel caso di una collisione elettrone-ione si ha che l'elettrone cede solo una frazione pari a  $m_e/m_i$  allo ione (per rendersene conto basta applicare le leggi della conservazione dell'impulso e dell'energia nel sistema in cui lo ione è inizialmente fermo). Quindi la termalizzazione richiede un tempo più lungo:

$$\tau_{ei} \simeq (m_i/m_e)\nu_{ei}^{-1}$$

Ne consegue che in un plasma di elettroni e protoni  $\tau_{ei} \gg \tau_{ii} \gg \tau_{ee}$  e quindi la termalizzazione di elettroni e ioni richiede tempi assai più lunghi di quelle tra specie uguali. Gli elettroni e gli ioni in un plasma possono quindi esistere per lunghi tempi a temperature diverse.

Vi sono infine, in presenza di un campo magnetico, altre due grandezze caratteristiche che giocano un ruolo molto importante: la *frequenza di Larmor* e la *velocità di Alfvén* definite rispettivamente da:

$$\omega_L = \frac{|e|B}{mc} \qquad (2.9)$$

$$v_A = \frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}} = \frac{B}{(4\pi m_i n_i)^{1/2}} \simeq 2.18 \times 10^{11} B n_i^{-1/2} \qquad (2.10)$$

Si avrà quindi:

$$\begin{aligned} \omega_{Le} &\simeq 1.76 \times 10^7 B \\ \omega_{Li} &= \frac{m_e}{m_i} \omega_{Le} \simeq 9.58 \times 10^3 B \end{aligned}$$

## 2.2 Modelli fisici per lo studio dei plasmi

Il modello fisico che viene normalmente utilizzato per lo studio della dinamica di un disco di accrescimento è il *modello magnetoidrodinamico o MHD*. Ma sotto quali condizioni questo modello è fisicamente plausibile? I parametri di plasma dei dischi sono tali da poterli studiare in regime MHD? Per rispondere a queste domande vediamo brevemente come si arriva al modello MHD a partire dalla *descrizione cinetica* dei plasmi (la più generale). Inoltre ci limitiamo per semplicità al caso di un plasma costituito da protoni ed elettroni con densità numerica  $n_p$  e  $n_e$  e carica  $e$  e  $-e$  rispettivamente.

### 2.2.1 I modelli cinetici

I modelli più generali sono i **modelli cinetici** che descrivono i plasmi attraverso un approccio statistico. In tale descrizione ci si mette nello *spazio delle fasi* a 6 dimensioni  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  e si introduce la *funzione di distribuzione*  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  che rappresenta la densità di particelle nello spazio delle fasi ad un generico tempo  $t$ . Nel nostro caso, in cui il plasma è costituito da protoni ed elettroni, avremo due funzioni di distribuzione  $f_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  e  $f_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  rispettivamente per i protoni e per gli elettroni. L'evoluzione dinamica di ciascuna di queste funzioni  $f_k$  ( $k=p,e$ ) è descritta dall'*equazione di Boltzmann collisionale*

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_k + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_k = \left( \frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_{coll} \quad (2.11)$$

dove  $\left( \frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_{coll} = -\frac{\mathbf{F}_{coll}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_k$  è il termine collisionale con  $\frac{\mathbf{F}_{coll}}{m}$  che rappresenta l'accelerazione subita dalle particelle per l'effetto delle collisioni e con  $\mathbf{F}$  indichiamo le forze dovute agli effetti collettivi cioè le forze generate dall'insieme delle particelle del plasma che qui comprende solo la forza elettromagnetica ( $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ).

E' necessario però specificare la natura delle collisioni e per ogni modello di collisione avremo una diversa equazione. Se le collisioni possono essere trascurate, ad esempio in un plasma rarefatto dominato dagli effetti collettivi, possiamo porre a zero il termine collisionale, l'equazione che ne risulta è detta *equazione di Vlasov*.

Visto che i campi elettrici  $\mathbf{E}$  e magnetici  $\mathbf{B}$  non sono campi esterni ma campi generati dal plasma stesso, l'equazione cinetica (2.11) dovrà essere accoppiata alle *equazioni di Maxwell*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.15)$$

Queste equazioni legano campi elettrici  $\mathbf{E}$  e magnetici  $\mathbf{B}$  alle distribuzioni di carica  $q$  e di corrente  $\mathbf{J}$  che, a loro volta, dovranno essere espressi in termini del moto delle particelle cariche che costituiscono il plasma e quindi della funzione

di distribuzione

$$q(\mathbf{x}, t) = \int e(f_i - f_e) d\mathbf{v} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \int e\mathbf{v}(f_i - f_e) d\mathbf{v} \quad (2.17)$$

Quindi i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  dipendono dalla funzione di distribuzione e l'equazione cinetica sarà un'equazione *non lineare* in  $f$ . Quando appena detto, insieme all'elevato numero di variabili da cui dipende  $f$  (sette nel caso generale), rendono molto complesso la risoluzione delle equazioni cinetiche. Queste infatti si riescono a risolvere (analiticamente e anche con simulazioni numeriche) solamente in particolari configurazioni (es. configurazioni che possiedono proprietà di simmetria i quali permettono di diminuire il numero di variabili indipendenti).

### 2.2.2 Il modello a due fluidi

Da un modello cinetico è possibile passare a un **modello a due fluidi** se si assume *collisionalità*: la scala (spazio-temporale) delle collisioni è piccola rispetto alla scala macroscopica cioè la scala in cui variano i campi medi (a questo livello di descrizione la collisionalità è però ancora inefficiente tra specie diverse, come vedremo fra un pò)

La collisionalità permette al plasma di raggiungere una situazione di *equilibrio termodinamico locale* con temperatura  $T_k(\mathbf{x}, t)$  in cui la funzione di distribuzione è una Maxwelliana:

$$f_{k0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n_k(\mathbf{x}, t) \left( \frac{m_k}{2\pi k T_k(\mathbf{x}, t)} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m_k [\mathbf{v} - \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}, t)]^2}{k T_k(\mathbf{x}, t)} \right) \quad (2.18)$$

dove  $(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ , detta *dispersione di velocità* della particella, è la differenza tra la velocità della singola particella  $\mathbf{v}$  e la velocità media  $\mathbf{u}$  e rappresenta la velocità della particella dovuta al moto di agitazione termica. Con il termine *locale* intendiamo che le funzioni  $n_k(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$  e  $T_k(\mathbf{x}, t)$  variano poco su distanze dell'ordine del cammino libero medio.

Tale condizione consente di trascurare i termini viscosi  $\Pi_{ij} = 0$  e di conduzione  $q_i = 0$  e rendere il sistema isotropo  $P_{ij} = P\delta_{ij}$ , permettendo così di chiudere il *sistema di equazioni a due fluidi* (vedi APPENDICE A-1).

Le equazioni del modello a due fluidi sono:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}^{(k)}) = 0 \quad (2.19)$$

$$n_k m_k \left( \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(k)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(k)} \right) + \nabla P^{(k)} - e_k n_k \mathbf{E} - \frac{e_k n_k}{c} (\mathbf{u}^{(k)} \times \mathbf{B}) = \mathbf{R}^{(k)} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} m_k n_k (u^{(k)})^2 + \frac{3}{2} P^{(k)} \right] + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} m_k n_k (u^{(k)})^2 + \frac{5}{2} P^{(k)} \right) \mathbf{u}^{(k)} \right] - e_k n_k \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}^{(k)} = Q^{(k)} \quad (2.21)$$

accoppiate alle equazioni di Maxwell per  $\nabla \times \mathbf{E}$  e  $\nabla \times \mathbf{B}$ .

Questo modello è una descrizione appropriata quando le 2 specie non hanno ancora raggiunto l'equilibrio termodinamico tra loro. Una situazione del genere può presentarsi in un plasma rarefatto a causa della relativa inefficienza delle collisioni tra specie diverse. Infatti, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, in un plasma di protoni ed elettroni la *termalizzazione* (causata dalle collisioni) tra elettroni e ioni richiede tempi assai più lunghi di quelle tra specie uguali  $\tau_{ei} \gg \tau_{ii} \gg \tau_{ee}$ .

### 2.2.3 Il modello magnetoidrodinamico

Quando il plasma ha elevata conducibilità elettrica e un elevata frequenza di collisione, è sempre in grado di mantenersi in condizioni di quasi neutralità ( $n_e \simeq n_p$ ) e in equilibrio maxelliano locale a una temperatura locale  $T(\mathbf{x}, t) = T_e(\mathbf{x}, t) = T_p(\mathbf{x}, t)$  nelle sue componenti (elettroni e protoni).

Sotto queste condizioni e mettendosi in un regime di basse frequenza, dal modello a due fluidi si può giungere al **modello a un fluido in regime magnetoidrodinamico** o **MHD** (vedi APPENDICE A-2).

Le equazioni del modello MHD, trascurando la viscosità, sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.22)$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (P \rho^{-\gamma}) = \frac{4\pi}{c^2} \eta J^2 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.25)$$

dove  $\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$  è la *diffusività magnetica* (spesso chiamata anche *resistività*) e qui l'abbiamo assunta *costante* cioè indipendenti dalle variabili termodinamiche.

Un caso speciale delle equazioni MHD è quello che si ottiene nel limite di conducibilità infinita (e quindi resistività nulla). In questo caso si parla di *plasma ideale* e le equazioni MHD si riducono a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.27)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (P \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.29)$$

È questo un sistema di vasta applicazione in astrofisica, dove i plasmi sono sempre caratterizzati da alta conduttività elettrica.

Un'altra utile formulazione dell'equazione del moto (2.23) si ottiene utilizzando l'identità  $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left( \frac{B^2}{2} \right)$ . L'equazione (2.23) allora diventa:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (2.30)$$

Da qui si vede che l'effetto del campo magnetico è quello di introdurre una pressione isotropa  $B^2/8\pi$  e una tensione lungo le linee di forza. Si noti che il termine di tensione scompare quando il campo magnetico non varia lungo la sua propria direzione. Quando ci sono tali variazioni, la forza che ne risulta agisce alla volta di riportare le linee di campo nella posizione non forzata. In un certo senso dunque, le linee di forza di  $\mathbf{B}$  si comportano come se fossero fatte di materiale elastico: una qualunque deformazione provoca una tensione lungo l'elastico che tende a tornare ad una configurazione rettilinea.

L'equazione del moto nella forma (2.23) mostra che sia la pressione magnetica  $B^2/8\pi$  che la pressione termica  $P$  influenzano il flusso del plasma. Un utile parametro che indica quale delle due pressioni dominerà la dinamica del sistema è il *parametro di plasma*  $\beta$  definito come il rapporto tra pressione del gas e pressione magnetica

$$\beta = \frac{P}{B^2/8\pi} = \frac{2 v_s^2}{\gamma v_a^2} \quad (2.31)$$

L'espressione è stata riscritta in termini di due velocità caratteristiche dei plasmi: la velocità del suono politropica  $v_s = (\gamma P/\rho)^{1/2}$  e la velocità di Alfvén  $v_A = B/(4\pi\rho)^{1/2}$ . Nelle situazioni in cui  $\beta \gg 1$  (o equivalentemente  $v_s \gg v_a$ )

la dinamica del sistema è dominata da effetti di natura idrodinamica, mentre quando  $\beta \ll 1$  (o  $v_s \ll v_a$ ) sono gli effetti magnetici ad essere dominanti.

## 2.3 Leggi di conservazioni MHD

Malgrado le approssimazioni fatte, il sistema a un fluido MHD ideale costituisce ancora un sistema complesso e presenta una ricca fenomenologia.

Per comprendere la sua struttura sono utili due strumenti di indagini: le *leggi di conservazione generali* e i *moti caratteristici del sistema lineare*.

Scriviamo le equazioni MHD ideali in forma di legge di conservazione. Ciascuna delle equazioni di conservazione che otterremo esprime, il tasso temporale di variazione della quantità conservata, in un qualsiasi punto nel fluido, come la divergenza (negativa) del corrispondente flusso in quel punto. L'integrazione di queste equazioni su un arbitrario volume e l'utilizzo del teorema di Gauss, ci da il tasso di variazione della quantità conservata all'interno del volume in termini del flusso attraverso la sua superficie di contorno.

### Conservazione della massa

L'equazione di continuità (2.26) è già scritta in forma conservativa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (2.32)$$

Scriviamo la forma integrale di questa equazione per un volume fissato  $V$  integrando su tale volume ciascun termine dell'equazione. Il termine al secondo membro è nella forma di divergenza di un flusso così che il suo integrale di volume può essere cambiato in integrale di superficie dal teorema di Gauss. Quindi si ha:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV}_{\text{tasso di variazione di massa}} = \underbrace{- \int_S \rho \mathbf{u} d\mathbf{S}}_{\text{tasso di outflow di massa}} \quad (2.33)$$

Questa equazione ci dice che il tasso di variazione di massa all'interno di un volume fissato  $V$  deve essere uguale al tasso di inflow e outflow attraverso il contorno  $S$ .

### Conservazione del momento

L'equazione del moto (2.30) si può scrivere in *forma conservativa* utilizzando l'equazione di continuità (2.32) e l'identità  $\nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ , si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u} + P\mathbf{I} - \mathbf{T}) \quad (2.34)$$

dove  $\mathbf{u}\mathbf{u}$  è il tensore prodotto di questi vettori,  $\mathbf{I}$  è il tensore identità e  $\mathbf{T} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{B^2}{8\pi}\mathbf{I}$  è il *tensore di Maxwell* nel limite non relativistico.

Scriviamo ora la forma integrale di questa equazione per un volume fissato  $V$  integrando su tale volume ciascun termine dell'equazione. I termini a secondo membro sono nella forma di divergenza di un flusso così che il loro integrale di volume può essere cambiato in integrale di superficie dal teorema di Gauss. Quindi si ha:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV}_{\substack{\text{tasso di variazione} \\ \text{del momento lineare}}} = \underbrace{- \int_S \rho \mathbf{u}\mathbf{u} d\mathbf{S}}_{\substack{\text{tasso di outflow} \\ \text{del momento lineare}}} - \underbrace{\int_S P d\mathbf{S}}_{\substack{\text{forza superficiale netta} \\ \text{della pressione del gas}}} + \underbrace{\int_S \mathbf{T} d\mathbf{S}}_{\substack{\text{forza superficiale netta} \\ \text{del tensore di Maxwell}}} \quad (2.35)$$

Questa equazione ci dice che la forza superficiale netta sul contorno  $S$  di un volume fissato  $V$ , è uguale al tasso di variazione del momento all'interno del volume più il flusso uscente netto di momento attraverso il contorno.

### Conservazione dell'energia

L'equazione di conservazione dell'energia totale si ottiene sommando l'equazione dell'energia interna (2.28) e l'equazione dell'energia cinetica (quest'ultima si ottiene moltiplicando scalarmente l'equazione del moto (2.27) per  $\mathbf{u}$  e usando la conservazione della massa (2.26)). Possiamo scrivere il risultato come:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{E}} \quad (2.36)$$

dove la densità di energia  $\mathcal{E}$  comprende l'energia cinetica, interna e magnetica

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi}$$

e il flusso di energia è

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = \left( \mathcal{E} + P + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}}{4\pi} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})$$

Scriviamo ora la forma integrale di questa equazione per un volume fissato  $V$  integrando su tale volume ciascun termine dell'equazione. I termini a secondo membro sono nella forma di divergenza di un flusso così che il loro integrale di volume può essere cambiato in integrale di superficie dal teorema di Gauss. Quindi si ha:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathcal{E} dV}_{\text{tasso di variazione dell'energia}} = \underbrace{- \int_S \mathcal{E} \mathbf{u} d\mathbf{S}}_{\text{tasso di outflow dell'energia}} - \underbrace{\int_S P \mathbf{u} d\mathbf{S}}_{\text{tasso di lavoro dalla pressione del gas}} - \underbrace{\int_S \frac{B^2}{8\pi} \mathbf{u} d\mathbf{S}}_{\text{tasso di lavoro dalla pressione magnetica}} + \underbrace{\int_S \frac{\mathbf{B}}{4\pi} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{S}}_{\text{tasso di lavoro dalla tensione magnetica}} \quad (2.37)$$

Questa equazione ci dice che il tasso di variazione dell'energia immagazzinata all'interno di un volume fissato  $V$  deve essere uguale al flusso uscente netto di energia attraverso il contorno  $S$  più il tasso di lavoro fatto sul gas dalle pressioni (del gas e campo magnetico) e dalla tensione magnetica.

### Conservazione del flusso magnetico

È meno ovvio che l'equazione di evoluzione per il campo magnetico è una equazione di conservazione. Questo è conosciuta come il *teorema del flusso congelato* dimostrato da Alfvén nel 1942. Alfvén ha mostrato che una conseguenza dell'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.38)$$

è che il flusso magnetico  $\Phi$  attraverso una qualunque superficie  $S$  limitata da una linea chiusa  $C$  che si muove insieme al plasma è costante nel tempo (Figura 2.1). Infatti al muoversi della linea chiusa  $C$  con il plasma, il flusso  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  può variare per due effetti distinti: (1) variazione locale di  $\mathbf{B}$  col tempo e (2) la variazione della superficie  $S$  deformata dal moto (perdita di flusso laterale):

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \times d\mathbf{l}$$

Scambiando tra loro le operazioni di prodotto vettoriale e prodotto scalare e utilizzando il teorema di Stock per convertire l'integrale di linea in integrale di superficie si vede che:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.39)$$

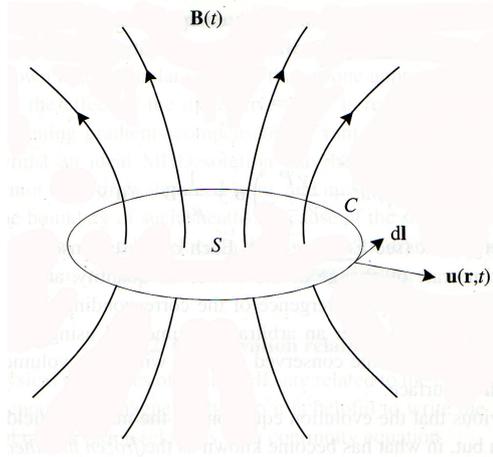


Figura 2.1: Flusso Magnetico attraverso una superficie  $S$  limitata da una linea chiusa  $C$  che si muove con il plasma

Quindi, se vale la (2.38), il flusso rimane costante, cioè il flusso è trasportato senza variazioni: il campo è *congelato* nel plasma.

L'insieme delle equazioni MHD ideale conservative possono essere riscritti nella forma compatta

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathcal{F}_{\mathbf{U}}) \quad (2.40)$$

dove

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ \mathcal{E} \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + P \mathbf{I} - \mathbf{T} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \left( \mathcal{E} + P + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}}{4\pi} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

sono rispettivamente il vettore delle *variabili conservative* e il corrispondente vettore del *flusso*.

## 2.4 Onde lineari in regime MHD ideale

Una caratteristica essenziale dei plasmi è la capacità di sostenere vari tipi onde i quali definiscono la dinamica del trasporto del momento e dell'energia.

Noi qui discutiamo le onde lineari in regime MHD ideale che sono onde a bassa frequenza, ma esistono anche onde in regimi diversi, fluidi o cinetici.

La base di partenza per lo studio delle onde lineari MHD è rappresentata dalle

equazioni MHD ideale che qui riscriviamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\
\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\
\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P &= -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{u} \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{2.42}$$

A queste equazioni applichiamo un' *analisi perturbativa lineare* che consiste nel considerare un stato di equilibrio e sottoporlo a una perturbazione lineare.

Consideriamo qui un equilibrio statico ( $\mathbf{u} = 0$ ) con campi di densità, pressione, e magnetici uniformi

$$\rho = \rho_0 \quad P = P_0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \tag{2.43}$$

e sottoponiamolo ad una generica *perturbazione lineare* cioè a una perturbazione dei campi la cui ampiezza sia molto più piccola dei corrispettivi valori dei campi all'equilibrio. Questo vuol dire che se indichiamo con  $\delta\rho$ ,  $\delta P$ ,  $\delta\mathbf{u}$  e  $\delta\mathbf{B}$  le perturbazioni rispettivamente del campo di densità, di pressione, di velocità e magnetico, deve risultare che:

$$|\delta\rho| \ll |\rho_0| \quad |\delta P| \ll |P_0| \quad |\delta\mathbf{u}| \ll v_s \quad |\delta\mathbf{B}| \ll |\mathbf{B}_0|$$

si noti che per la velocità, la teoria lineare richiede generalmente che la perturbazione sia meno della velocità del suono. La velocità del flusso di base da sola è generalmente irrilevante nello stabilire la linearità di una perturbazione poichè il moto assoluto non può influire sulla fisica locale.

Inserendo nel sistema MHD (2.42) per ogni generico campo  $f$  il valore di tale campo all'equilibrio più la perturbazione ( $f_0 + \delta f(\mathbf{x}, t)$ ) e linearizzando le equazioni (teniamo solo i termini del primo ordine), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} &= -\rho_0 (\nabla \cdot \delta\mathbf{u}) \\
\rho_0 \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla \delta P + \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0] \\
\frac{\partial \delta P}{\partial t} &= -\rho_0 v_s^2 (\nabla \cdot \delta\mathbf{u}) \\
\frac{\partial \delta\mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\delta\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)
\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la velocità del suono  $v_s^2 = \gamma P_0/\rho_0$ . Le equazioni MHD linearizzate possono essere semplificate introducendo lo *spostamento lagrangiano*  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$  che è legato alla perturbazione di velocità euleriana  $\delta\mathbf{u}$  dalla relazione

$$\delta\mathbf{u} = \frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \partial\boldsymbol{\xi}/\partial t$$

Scegliendo opportune condizioni iniziali si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta\rho &= -\rho_0(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} &= -\nabla\delta P + \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0] \\ \delta P &= -\rho_0 v_s^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \\ \delta\mathbf{B} &= \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \end{aligned}$$

La linearità delle equazioni permette, per risolverlo, di utilizzare il *metodo dei modi normali* (APPENDICE B) per cui una qualunque perturbazione può essere scomposta in componenti di Fourier. Poichè i coefficienti in queste equazioni lineari non dipendono da nessuna coordinata, la trasformata di Fourier può essere applicata a tutte le coordinate. Quindi ciascun campo perturbato  $\delta f$  può essere decomposta in componenti di Fourier nella forma:

$$\delta f(\mathbf{x}, t) = \delta f_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad (2.44)$$

dove  $\mathbf{k}$  è il numero d'onda (un intero) e  $\omega$  è la frequenza d'onda. Sostituiamo i modi normali nelle equazioni linearizzate otteniamo il seguente sistema di equazioni per le trasformate (per semplicità di notazione abbiamo indicato con  $\delta f$  invece che con  $\delta f_k$  la trasformata di Fourier del generico campo perturbato  $\delta f$ )

$$\delta\rho = -i\rho_0(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \quad (2.45)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi} = -i\mathbf{k}\delta P + \frac{i}{4\pi} [(\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0] \quad (2.46)$$

$$\delta P = -i\rho_0 v_s^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \quad (2.47)$$

$$\delta\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \quad (2.48)$$

Sostituendo le espressioni per  $\delta P$  e  $\delta\mathbf{B}$  nell'equazione del moto, scrivendo  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_b$  e introducendo la velocità di Alfvèn  $v_a^2 = B_0/4\pi\rho_0$ , si ottiene un'equazione per la sola  $\boldsymbol{\xi}$ :

$$\omega^2 \boldsymbol{\xi} = v_s^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) + v_a^2 \{\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{e}_b)] \times \mathbf{e}_b\} \quad (2.49)$$

### 2.4.1 Onde magnetiche

Consideriamo dapprima per semplicità il caso in cui gli effetti della comprimibilità, rappresentati dalla presenza di  $v_s^2$ , siano trascurabili. Sviluppando successivamente i tripli prodotti vettoriali contenuti nella (2.49) si ottiene la seguente espressione

$$\omega^2 \boldsymbol{\xi} = v_a^2 \{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)^2 \boldsymbol{\xi} + [(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b)] \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \} \quad (2.50)$$

Moltiplicando scalarmente questa equazione per  $\mathbf{e}_b$  si vede che

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b = 0$$

cioè che gli spostamenti  $\boldsymbol{\xi}$ , e quindi le velocità, delle particelle sono perpendicolari alla direzione del campo magnetico  $\mathbf{B}_0$ . Introducendo questa condizione nella (2.50) e moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{k}$  si ottiene

$$(\omega^2 - k^2 v_a^2)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (2.51)$$

Questa equazione ha due possibili soluzioni ( $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ ) oppure ( $\omega^2 = k^2 v_a^2$ ) che ora esamineremo

- **Onde di Alfvén** ( $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ )

La condizione  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ , equivale nello spazio ordinario a  $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ , implica che le perturbazioni sono incomprimibili. Naturalmente, ciò non significa che il plasma sia incomprimibile, ma semplicemente che le perturbazioni non provocano variazioni di densità e di pressione (2.45, 2.47). Introducendo questa condizione nella (2.50) otteniamo la relazione di dispersione

$$\omega^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)^2 v_a^2 = k^2 v_a^2 \cos^2 \theta \quad (2.52)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il vettore di propagazione  $\mathbf{k}$  e la direzione del campo magnetico imperturbato  $\mathbf{B}_0$ . Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{e}_b$  la (2.48) si vede che

$$\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_b = 0 \quad (2.53)$$

che mostra come anche le perturbazioni magnetiche siano perpendicolari alla direzione del campo magnetico  $\mathbf{B}_0$ . Queste onde, dette *onde di Alfvén* (Figura 2.2) sono quindi delle onde *trasversali* per quel che riguarda sia gli spostamenti che il campo magnetico.

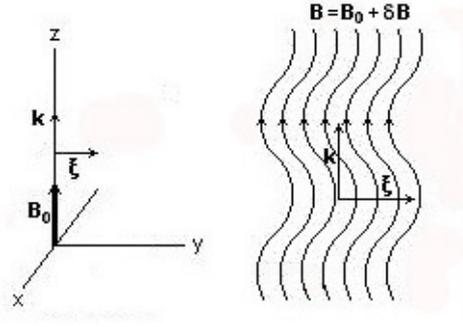


Figura 2.2: Onde di Alfvén (caso  $\theta = 0^\circ$ )

La relazione di dispersione per le onde di Alfvén, mostra che la loro velocità di fase  $\mathbf{v}_f = \left(\frac{\omega}{k}\right) \mathbf{e}_k$  dipende dall'angolo di propagazione rispetto a  $\mathbf{B}_0$

$$\mathbf{v}_f = \pm(v_a \cos\theta) \mathbf{e}_k$$

Poichè nella relazione di dispersione (2.52) compare solo la componente di  $\mathbf{k}$  lungo la direzione di  $\mathbf{B}_0$ , la velocità di gruppo è diretta come  $\mathbf{e}_b$

$$\mathbf{v}_g = \pm v_a \mathbf{e}_b$$

Si vede da qui che anche se l'onda di Alfvén si propaga in una direzione diversa da quella di  $\mathbf{B}_0$ , l'energia associata all'onda si propaga lungo  $\mathbf{B}_0$ . Utilizzando ancora una volta l'espressione per  $\delta\mathbf{B}$  data dalla (2.48), la condizione (2.53) e la relazione di dispersione (2.52) si ricava facilmente una relazione tra la velocità  $\delta\mathbf{u} = (\partial\xi/\partial t) \rightarrow -i\omega\xi$  e la perturbazione del campo magnetico  $\delta\mathbf{B}$

$$\frac{\delta\mathbf{B}}{B_0} = \pm \frac{\delta\mathbf{u}}{v_a} \quad (2.54)$$

Questa relazione caratterizza in maniera precisa le onde di Alfvén. Dalla precedente equazione segue che il rapporto tra l'energia cinetica e l'energia magnetica dell'onda:

$$\frac{E_{cin}}{E_{mag}} = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 U^2}{\frac{B_0^2}{8\pi}} = 1$$

e quindi in un'onda di Alfvén l'energia si equipartisce tra le due forme cinetica e magnetica.

L'origine fisica delle onde di Alfvén può essere intuita consierando la forma della forza magnetica linearizzata

$$\mathbf{F}_{mag}(linearizzata) \propto (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0 - (\mathbf{B}_0 \cdot \delta\mathbf{B})\mathbf{k}$$

Il primo termine di questa equazione è legato alla tensione magnetica, mentre il secondo è connesso con la pressione magnetica (come si capisce facilmente considerando che è la forma linearizzata del termine  $\nabla(B^2/8\pi)$ ). Poichè quest'ultimo termine è nullo a causa della (2.54), se ne conclude che le onde di Alfvén sono un effetto della tensione magnetica.

- **Onde di Alfvén comprimibili  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} \neq 0$**

Se  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} \neq 0$  la soluzione della (2.51) è semplicemente

$$\omega^2 = k^2 v_a^2 \quad (2.55)$$

Si tratta quindi di onde comprimibili con velocità di fase e velocità di gruppo isotrope ed uguali tra loro:  $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_g = \pm v_a \mathbf{e}_k$ .

### 2.4.2 Onde magnetosoniche

Reintroduciamo ora gli effetti della comprimibilità del mezzo, utilizzando la forma completa della (2.49) e sviluppiamo i tripli prodotti vettoriali. Si ottiene la seguente espressione

$$\omega^2 \boldsymbol{\xi} = v_s^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{k} + v_a^2 \{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)^2 \boldsymbol{\xi} + [(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b)] \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \} \quad (2.56)$$

Seguendo lo stesso procedimento adottato per le onde magnetiche, moltiplichiamo scalarmente la precedente equazione per  $\mathbf{e}_b$  e per  $\mathbf{k}$ , ottenendo

$$\omega^2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b) = v_s^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b) \quad (2.57)$$

e

$$[\omega^2 - k^2(v_s^2 + v_a^2)] (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) = -k^2 v_a^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b) \quad (2.58)$$

- Se  $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) = 0$  la (2.57) implica che anche  $(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b) = 0$  e, utilizzando questi risultati nella (2.56), ritroviamo la relazione di dispersione per le onde di Alfvén

$$\omega^2 = k^2 v_a^2 \cos^2 \theta$$

Le onde di Alfvén (incomprimibili) sono quindi una soluzione anche nel caso in cui la comprimibilità del mezzo viene tenuta in conto.

- Se  $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \neq 0$ , possiamo moltiplicare la (2.58) per  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)$  e utilizzare la (2.57) per ottenere la seguente equazione:

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (v_s^2 + v_a^2) + v_s^2 v_a^2 k^4 \cos^2 \theta = 0$$

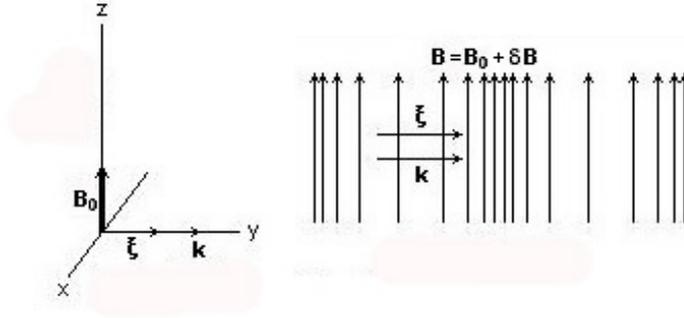


Figura 2.3: Onde magnetosoniche (caso  $\theta = 90^\circ$ )

Le due soluzioni (in  $\omega^2$ ) della precedente equazione fornisce le relazioni di dispersione delle *onde magnetosoniche* (Figura 2.3)

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[ (v_s^2 + v_a^2) \pm \sqrt{v_s^4 + v_a^4 - 2v_s^2 v_a^2 \cos 2\theta} \right] \quad (2.59)$$

I due modi corrispondenti rispettivamente al segno più e al segno meno nella (2.59) sono detti *onda magnetosonica veloce* e *onda magnetosonica lenta*. L'onda di Alfvén, come si vede, ha una velocità di fase intermedia tra le due.

## 2.5 Equazioni MHD ideale in coordinate cilindriche

Per trattare problemi in cui il flusso di base è circolare, come supporremo nel prossimo capitolo, è conveniente utilizzare un *sistema di coordinate polari cilindriche*  $(R, \phi, z)$ . Le equazioni MHD ideali scritte in componenti sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\rho R u_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho u_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_R}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_R - \frac{u_\phi^2}{R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial R} \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} \left[ (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_R - \frac{B_\phi^2}{R} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\phi + \frac{u_R u_\phi}{R} &= -\frac{1}{R\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} \left[ (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_\phi + \frac{B_R B_\phi}{R} \right] \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_z - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_R}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_R &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_R - B_R (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
\frac{\partial B_\phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_\phi + \frac{u_R B_\phi}{R} &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\phi + \frac{B_R u_\phi}{R} - B_\phi (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
\frac{\partial B_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_z &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_z - B_z (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (P R u_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (P u_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (P u_z) &= (1 - \gamma) P (\nabla \cdot \mathbf{u})
\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \nabla &= u_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{u_\phi}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \\
\mathbf{B} \cdot \nabla &= B_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{B_\phi}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R u_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$



## Capitolo 3

# MODELLI DI EQUILIBRIO DI UN DISCO IN ROTAZIONE

In questo capitolo costruiamo dei modelli di equilibrio per un disco di accrescimento contenente un campo magnetico. Il modello di disco che adottiamo consiste in un fluido in rotazione differenziale intorno a un corpo massivo centrale perfettamente conduttore e non auto-gravitante.

Nel costruire le configurazioni di equilibrio del nostro modello di disco distinguiamo due casi: (1) il caso in cui gli effetti del campo magnetico sono trascurabili ( $\beta \gg 1$ ); (2) il caso in cui bisogna invece tenerne conto ( $\beta \ll 1$ ). Infine presentiamo due modelli di equilibrio (adiabatico e isoterma) nell'approssimazione di disco sottile e facciamo vedere come in questo caso è possibile trascurare il gradiente di pressione radiale rispetto alla forza di gravità lungo  $R$ . Sotto tali circostanze è quindi possibile assumere un equilibrio Kepleriano.

### 3.1 Stati di equilibrio di un plasma ideale

Una possibile soluzione delle equazioni magnetoidrodinamiche ideali (2.26-2.29) è quella che rappresenta lo *stato di equilibrio* del sistema cioè lo stato in cui nessuna delle variabili che descrive il sistema è funzione del tempo ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ).

All'equilibrio tutte le grandezze fisiche assumono un insieme di ben precisi

valori  $(\rho, P, \mathbf{u}, \mathbf{B})$  legati tra loro dall'equazione:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P - \nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \rho \nabla \Phi \quad (3.2)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) P = -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (3.4)$$

Queste sono le *equazioni di equilibrio stazionarie* ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ) e un sistema che si trovi in tale stato di equilibrio vi rimarrà fino a quando non intervengono cambiamenti nelle forze che agiscono sul sistema o nelle condizioni al contorno. La presenza di un campo magnetico non implica però necessariamente una forza magnetica diversa da zero. Per questo possiamo distinguere due classi di equilibri:

### 1. Equilibri senza forza magnetica

Questi equilibri si possono presentare in due casi, come si vede dall'espressione della forza magnetica scritta come

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

- Quando  $\mathbf{J} = 0$ , nel qual caso si parla di *campi potenziali*. In questo caso infatti,  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  e quindi il campo può essere rappresentato come il gradiente di una funzione scalare, il *potenziale magnetico*
- Quando  $\mathbf{J} \neq 0$ , è sufficiente che  $\mathbf{J}$  sia parallela a  $\mathbf{B}$

### 2. Equilibri in presenza di forza magnetica

Questi equilibri si presentano quando  $\mathbf{J} \neq 0$  e non è parallelo a  $\mathbf{B}$ . In questi casi la natura anisotropa delle forze magnetiche rende più complessa la struttura degli equilibri. Tuttavia, come abbiamo visto nel precedente capitolo, quando  $\beta \gg 1$  gli effetti della forza magnetica sulla configurazione di equilibrio sono trascurabili rispetto a quelli dovuti ai gradienti di pressione e l'equilibrio diventa a tutti gli effetti un equilibrio idrostatico

Nei prossimi paragrafi vedremo due possibili configurazioni di equilibrio, soluzione dell'equazione (3.2), per un disco di accrescimento:

- Configurazione di *disco spesso o toro*
- Configurazione di *disco sottile*

## 3.2 Disco di accrescimento toroidale

Un possibile stato di equilibrio per un disco è quello di un *fluido ruotante assisimmetrico stazionario*. Un tale sistema è caratterizzato dal fatto che le grandezze fisiche che lo descrivono non variano se ci spostiamo lungo la direzione della rotazione. Quindi di fatto ci troviamo di fronte a un problema a due dimensioni.

Per la simmetria assiale del sistema è conveniente quindi utilizzare un sistema di coordinate cilindriche  $(R, \phi, z)$  con origine al centro del disco e con l'asse  $z$  coincidente con l'asse di simmetria in modo tale che le variabili che descrivono il sistema non sono funzioni della coordinata azimutale  $\phi$  ( $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ ) ma dipendono solo da  $R$  e  $z$ . In tale sistema di riferimento pertanto, il fluido si muove solo lungo la direzione azimutale  $\mathbf{u} = u_\phi(R, z)\hat{\mathbf{e}}_\phi$ .

Assumiamo inoltre che il campo magnetico che attraversa il toro abbia solo la componente toroidale  $\mathbf{B} = B_\phi(R, z)\hat{\mathbf{e}}_\phi$  (non sono disponibili soluzioni di equilibrio analitiche in presenza di campo magnetico e velocità non toroidale).

Sotto queste assunzioni, i campi di densità, pressione, velocità e magnetico possono essere scritti

$$\rho = \rho(R, z) \quad P = P(R, z) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_\phi(R, z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_\phi(R, z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Inoltre, il termine avvevativo e il termine di tensione magnetica si riducono ad una espressione molto semplice:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{u_\phi^2}{R}\hat{\mathbf{e}}_R \quad (3.6)$$

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = -\frac{B_\phi^2}{R}\hat{\mathbf{e}}_R \quad (3.7)$$

Analizziamo ora la configurazione di questo equilibrio distinguendo due casi: quello in cui  $\beta \gg 1$  e quello in cui  $\beta \lesssim 1$ .

### 3.2.1 Disco di accrescimento toroidale con $\beta \gg 1$

Assumiamo di trovarci nella situazione in cui  $\beta \gg 1$  (o equivalentemente  $v_s^2 \gg v_A^2$ ) in cui risulta che la forza magnetica è molto più piccola dei gradienti di pressione. In questa caso per stabilire la configurazione di equilibrio possiamo trascurare il contributo della forza magnetica.

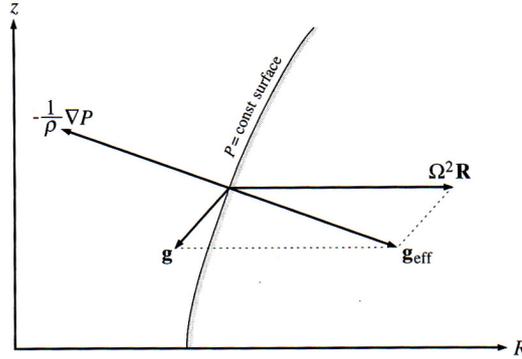


Figura 3.1: Bilancio delle forze che agiscono su un elemento di fluido nel piano z-R

L'equazione di equilibrio (3.2) si riduce a:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \Phi + \Omega^2 R \hat{e}_R \quad (3.8)$$

e scritta in componenti è

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \Omega^2 R \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.10)$$

dove  $R\Omega(R, z) = u_\phi(R, z)$ . L'equazione di equilibrio, scritta in questo modo, ci permette subito di notare una proprietà caratteristica di questa configurazione e cioè che il vettore definito dalla somma vettoriale delle accelerazioni gravitazionale e centrifuga, chiamata *gravità effettiva*, è ovunque ortogonale alle superfici di pressione costante (*superfici isobare*) (figura 3.1).

### Stratificazione del toro - Modelli politropici

Una volta fissato il campo gravitazionale esterno  $\Phi(R, z)$ , la stratificazione del toro dipende dalla legge che lega la pressione  $P(R, z)$  alla densità  $\rho(R, z)$  e dal profilo della velocità angolare  $\Omega(R, z)$ .

Per un disco come per molti altri fluidi astrofisici si usa come equazione di stato la *legge dei gas perfetti*:

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (3.11)$$

dove  $k \simeq 1.38 \times 10^{-16} \text{ergK}^{-1}$  è la costante di Boltzman,  $m_H \sim m_p \simeq 1.67 \times 10^{-24} \text{g}$  è la massa dell'atomo di idrogeno e  $\mu$  è il peso molecolare medio.

Noi qui inoltre facciamo l'ipotesi *barotropica* cioè supponiamo che la pressione dipenda solo dalla densità  $P = P(\rho)$  e fra tutte i tipi di dipendenza scegliamo una dipendenza di tipo *politropico* che ha la forma:

$$P = P_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1+\frac{1}{n}} = P_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (3.12)$$

dove  $n$  l'indice politropico e  $\rho_0$  e  $P_0$  sono rispettivamente la densità e la pressione del gas in una posizione di riferimento. Esistono diversi tipi di equilibrio possibili in base al tipo di fluido che si considera:

- per un *gas adiabatico monoatomico* ( $n = \frac{3}{2}$ )  $\implies P \approx \rho^{\frac{5}{3}}$
- per un *gas isoterma* ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies P \approx \rho(T = \text{cost})$
- per un *fluido omogeneo* ( $n \rightarrow 0$ )  $\implies P^n = k^n \rho^{n+1} (\rho = \text{cost})$

In un fluido barotropico si può far vedere che la velocità angolare  $\Omega$  è indipendente dalla coordinata verticale  $z$  ( $\partial\Omega/\partial z = 0$ ) cioè la velocità angolare è costante su superfici cilindriche centrate sull'asse di rotazione ( $\Omega = \Omega(R)$ ). Questo è una versione del *teorema di Taylor-Proudman* il quale afferma che sotto certe condizioni la velocità in un fluido in rotazione è indipendente dall'altezza. Noi qui assumiamo una curva di rotazione che ha la forma

$$\Omega(R) = \Omega_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^q \quad (3.13)$$

dove  $q$  è una costante e  $R_0$  e  $\Omega_0$  sono rispettivamente una distanza di riferimento e la velocità angolare a quella distanza. Secondo il *teorema di Poincarè-Wavre* il fatto che la  $\Omega$  sia costante su cilindri è equivalente alle seguenti affermazioni:

- la gravità effettiva può essere derivata da un potenziale
- la stratificazione è tale che le superfici a  $P$ ,  $\rho$ ,  $\Phi$  costanti coincidono
- la gravità effettiva è ortogonale a queste superfici

Vediamo adesso come l'ipotesi politropica (3.12) ci permette di scrivere l'equazione di equilibrio (3.8) in termini di un'unica funzione potenziale  $\Psi(R, z)$ .

La (3.12) ci permette di definire la *funzione entalpia*  $h(\rho)$  definita come

$$\frac{dP(\rho)}{\rho} = dh(\rho) \quad (3.14)$$

dove  $d$  denota una derivata lungo una qualunque coordinata  $(R, z)$ . Integrando viene fuori che

$$h = \int \frac{dP}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \frac{v_s^2}{\gamma - 1} \quad (3.15)$$

La (3.12) implica, come abbiamo visto, una velocità angolare  $\Omega$  indipendente dalla coordinata  $z$  ( $\partial\Omega/\partial z = 0$ ). Questo ci permette di introdurre un potenziale rotazionale  $\Phi_{rot}$  tale che

$$\Omega^2 R \hat{e}_R = \nabla \Phi_{rot} \quad (3.16)$$

Integrando e considerando l'espressione della velocità angolare (3.13) si ottiene:

$$\Phi_{rot} = \int \Omega^2(R') R' dR' = -\frac{1}{2q-2} L_0^2 R^{-2q+2} \quad (3.17)$$

dove  $L_0 = \Omega_0 R_0^q$  e abbiamo eliminato la costante di integrazione così che  $\Phi_{rot}$  sparisce a  $R \rightarrow \infty$ .

Tenendo conto delle equazioni (3.14) e (3.16), l'equazione di equilibrio (3.8) può essere scritta in termini di un'unica funzione potenziale  $\Psi(R, z) = h + \Phi - \Phi_{rot}$  tale che

$$\nabla \Psi(R, z) = \nabla(h + \Phi - \Phi_{rot}) = 0 \quad (3.18)$$

Integrando ed esplicitando in vari termini si ottiene

$$h(R, z) - \frac{GM}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2q-2} L_0^2 R^{-2q+2} = C \quad (3.19)$$

dove  $C$  è la costante di integrazione.

Assumiamo ora  $q = 2$ , cioè un profilo di velocità angolare  $\Omega = \Omega_0(R_0/R)^2$ . Questo ci porta a un toro con un momento angolare specifico costante nell'intero spazio.

$$L = R^2 \Omega = R_0^2 \Omega_0 = L_0 \quad (3.20)$$

In questo caso il potenziale rotazionale diventa  $\Phi_{rot} = -L_0^2/2R^2$  e l'equazione di equilibrio (3.19) si scrive

$$h(R, z) - \frac{GM}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L_0^2}{2R^2} = C \quad (3.21)$$

Per specificare l'equilibrio è conveniente introdurre il raggio caratteristico  $R_c$  definito come la distanza dall'asse di rotazione di massima entalpia  $\nabla h = 0$  (e quindi di massima densità e pressione). Questa distanza si ottiene facilmente

mettendosi nel piano  $z = 0$  e risolvendo l'equazione (3.18) con  $\nabla h = 0$ , cioè l'equazione

$$\frac{GM}{R_c^2} - \frac{L_0^2}{R_c^3} = 0 \quad (3.22)$$

Si vede subito che a questa distanza la velocità di rotazione  $u_\phi = L_0/R_c$  è uguale alla velocità Kepleriana  $v_{K0} = (GM/R_c)^{1/2}$  e il momento angolare specifico costante  $L_0$  si scrive

$$L_0^2 = GM R_c \quad (3.23)$$

Inoltre a  $R_c$  l'entalpia  $h$  si scrive

$$h(R_c, 0) = C + \frac{GM}{R_c} - \frac{L_0^2}{2R_c^2} \quad (3.24)$$

Utilizzando la (3.23) e mettendo in evidenza la  $GM/R_c$ , l'equazione (3.21) può essere riscritta:

$$h(R, z) = \frac{GM}{R_c} \left( \frac{R_c}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{R_c^2}{R^2} - C' \right) \quad (3.25)$$

dove  $C' = -CR_c/GM$ . Vediamo che i parametri che descrivono la struttura del toro idrodinamico in questo modello sono  $\gamma$ ,  $R_c$  e  $C'$ .

Il contorno del toro (la superficie a entalpia zero) è dato da

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R_c}{R} \right)^2 - \left( \frac{R_c^2}{R^2 + z^2} \right)^{1/2} + C' = 0 \quad (3.26)$$

I valori  $R_\pm$  in cui il contorno interseca il piano  $z = 0$  è ottenuto mettendo  $z = 0$  e risolvendo l'equazione (3.26) per  $R_c/R$ . Otteniamo

$$R_\pm = \frac{R_c}{1 \mp \sqrt{1 - 2C'}} \quad (3.27)$$

dove  $R_+$  corrisponde al punto più esterno del toro e  $R_-$  al punto più interno. Una misura della distorsione  $d$  del toro ci è data dalla quantità adimensionale

$$d = \frac{\frac{1}{2}(R_+ + R_-)}{R_c} = (2C')^{-1} \quad (3.28)$$

Più è grande  $d$ , più la sezione del toro si discosta dalla forma circolare e quindi il toro diventa più disteso.

### Range dei parametri

Come si vede dalla (3.27), le configurazioni delimitate esistono solo se

$$0 < 2C' < 1$$

- Per  $2C'$  vicino a 1, l'anello è piccolo e non distorto così che ha quasi una sezione circolare.
- Come  $2C'$  decresce a zero, il toro diventa man man sempre più disteso e quando  $2C' = 0$  il punto più interno diventa  $R_- = \frac{1}{2}R_c$  e il punto più esterno  $R_+ = \infty$
- Quando  $2C' < 0$  la configurazione si estende all'infinito e una pressione finita deve essere fornito a  $R = \infty$

### 3.2.2 Disco di accrescimento toroidale con $\beta \lesssim 1$

Assumiamo di trovarci nella situazione in cui  $\beta \lesssim 1$  (o equivalentemente  $v_s \lesssim v_A$ ) in cui risulta che la forza magnetica è comparabile o maggiore del gradiente di pressione. In questo caso dobbiamo tener conto anche degli effetti del campo magnetico per stabilire la configurazione di equilibrio.

Assumiamo inoltre, che il momento angolare specifico sia costante nell'intero spazio ( $L = R^2\Omega = R_0^2\Omega_0 = L_0$ ), sebbene è immediato estendere la presente trattazione a una qualsiasi distribuzione di momento angolare.

L'equazione di equilibrio (3.2) si riduce a:

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla\Phi + \Omega^2 R\hat{e}_R - \frac{B_\phi}{4\pi\rho}\nabla B_\phi - \frac{1}{4\pi\rho}\frac{B_\phi^2}{R}\hat{e}_R \quad (3.29)$$

e scritta in componenti è

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \Omega^2 R - \frac{B_\phi}{4\pi\rho R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\phi) \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{B_\phi}{4\pi\rho}\frac{\partial B_\phi}{\partial z} \quad (3.31)$$

dove  $R\Omega(R, z) = u_\phi(R, z)$ .

### Stratificazione del toro - Modelli politropici

La stratificazione del toro in questo caso, oltre che dalla legge che lega la pressione  $P(R, z)$  alla densità  $\rho(R, z)$  e dal profilo di velocità angolare  $\Omega(R, z)$ , dipende anche dal profilo del campo magnetico  $B_\phi(R, z)$ .

Vediamo ora, come abbiamo fatto nel caso  $\beta \ll 1$ , sotto quali assunzioni riusciamo a scrivere l'equazione di equilibrio (3.29) in termini di un'unica funzione potenziale  $\Psi(R, z)$ .

Come prima, ci mettiamo nell'ipotesi politropica  $P = K\rho^\gamma$  e scegliamo una curva di rotazione che ha la forma  $\Omega(R) = \Omega_0(R_0/R)^q$ . Queste assunzioni, come abbiamo visto, ci permettono di scrivere il termine di pressione come:

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = \nabla h \quad \text{con } h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{v_s^2}{\gamma-1} \quad (3.32)$$

dove  $h$  è la funzione entalpia e il termine di rotazione come:

$$\Omega^2 R \hat{\mathbf{e}}_R = \nabla \Phi_{rot} \quad \text{con } \Phi_{rot} = -\frac{L_0^2}{2R^2} \quad (3.33)$$

dove  $\Phi_{rot}$  rappresenta il potenziale rotazionale e  $L_0 = \Omega_0 R_0^2$ . Queste assunzioni non bastano per ottenere l'equazione di equilibrio nella forma desiderata. Per raggiungere il nostro obiettivo, dobbiamo introdurre una funzione  $\Phi_{mag}$  tale che

$$-\frac{B_\phi}{4\pi\rho} \nabla B_\phi - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{B_\phi^2}{R} \hat{\mathbf{e}}_R = \nabla \Phi_{mag} \quad (3.34)$$

Questo è possibile se assumiamo che la velocità di Alfvén  $v_A$  sia una funzione di  $RB_\phi$  e in particolare assumiamo l'espressione:

$$v_A^2 = \frac{B_\phi^2}{4\pi\rho} = \frac{(4\pi H)^{1/\gamma}}{4\pi} (RB_\phi)^{2(\gamma-1)/\gamma} \quad (3.35)$$

dove  $H$  è una costante. Si noti che la velocità di Alfvén è costante quando  $\gamma = 1$ . Integrando la (3.34) e utilizzando la (3.35) si ottiene:

$$\Phi_{mag} = \int -\frac{B_\phi}{4\pi\rho} \nabla B_\phi - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{B_\phi^2}{R} \hat{\mathbf{e}}_R = \frac{\gamma}{2(\gamma-1)} \frac{(4\pi H)^{1/\gamma}}{4\pi} (RB_\phi)^{2(\gamma-1)/\gamma} = \frac{\gamma v_A^2}{2(\gamma-1)} \quad (3.36)$$

Si noti che il quadrato della velocità di Alfvén può anche essere scritta (elevando alla  $\gamma$  la (3.35)) come

$$v_A^2 = H(\rho R^2)^{\gamma-1} \quad (3.37)$$

Tenendo conto delle equazioni (3.32), (3.33) e (3.34), l'equazione di equilibrio (3.8) può essere scritta in termini di un'unica funzione potenziale  $\Psi(R, z) = h + \Phi - \Phi_{rot} - \Phi_{mag}$  tale che

$$\nabla \Psi(R, z) = \nabla(h + \Phi - \Phi_{rot} - \Phi_{mag}) = 0 \quad (3.38)$$

Integrando ed esplicitando in vari termini si ottiene

$$\frac{v_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L_0^2}{2R^2} + \frac{\gamma v_A^2}{2(\gamma-1)} = C \quad (3.39)$$

dove  $C$  è la costante di integrazione.

Per specificare l'equilibrio è conveniente introdurre il raggio caratteristico  $R_c$  definito come la distanza dall'asse di rotazione dove la velocità del suono è massima (e quindi l'entalpia è massima  $\nabla h = 0$ ). Questa distanza  $R_c$  si ottiene mettendosi nel piano  $z = 0$  e risolvendo l'equazione (3.38) con  $\nabla h = 0$  cioè l'equazione

$$\frac{GM}{R_c^2} - \frac{L_0^2}{R_c^3} + \frac{\gamma v_{Ac}^2}{R_c} = 0 \quad (3.40)$$

Si vede subito che a questa distanza il momento angolare specifico costante  $L_0$  si scrive:

$$L_0^2 = GM R_c + \gamma v_{Ac}^2 R_c^2 \quad (3.41)$$

e la velocità del suono  $v_{sc}$  si scrive

$$v_{sc}^2 = (\gamma - 1) \left[ C + \frac{GM}{R_c} - \frac{L_0^2}{2R_c^2} - \frac{\gamma v_{Ac}^2}{2(\gamma - 1)} \right] \quad (3.42)$$

Per specificare l'equilibrio, è anche conveniente riscrivere la velocità di Alfvén, utilizzando la (3.37), in termini della velocità del suono e delle quantità al raggio caratteristico  $R_c$

$$v_A^2 = v_{Ac}^2 \frac{R_c^{2(\gamma-1)} v_s^2}{R_c^{2(\gamma-1)} v_{sc}^2} \quad (3.43)$$

Utilizzando la (3.41) e (3.43) e mettendo in evidenza  $GM/R_c$ , l'equazione (3.44) può essere riscritta come

$$\frac{v_s^2}{\gamma - 1} = \frac{GM}{R_c} \left[ \frac{R_c}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{R_c^2}{2R^2} - \frac{\gamma v_{Ac}^2 R_c^3}{2GMR^2} - \frac{R_c}{GM} \frac{\gamma v_{Ac}^2}{2(\gamma - 1)} \frac{R_c^{2(\gamma-1)} v_s^2}{R_c^{2(\gamma-1)} v_{sc}^2} - C' \right] \quad (3.44)$$

dove  $C' = -CR_c/GM$ . Vediamo che i parametri che descrivono la struttura del toro MHD in questo modello sono  $\gamma$ ,  $R_c$ ,  $C'$  e  $v_{Ac}$ .

Il contorno del toro (la superficie a entalpia zero) è dato da

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R_c}{R} \right)^2 + \frac{\gamma v_{Ac}^2 R_c}{2GM} \left( \frac{R_c}{R} \right)^2 - \left( \frac{R_c^2}{R^2 + z^2} \right)^{\frac{1}{2}} + C' = 0 \quad (3.45)$$

I valori  $R_{\pm}$  in cui il contorno interseca il piano  $z = 0$  è ottenuto mettendo  $z = 0$  e risolvendo l'equazione (3.45) per  $R_c/R$ . Otteniamo

$$R_{\pm} = \frac{R_c \left( 1 + \frac{\gamma v_{Ac}^2 R_c}{GM} \right)}{1 \mp \sqrt{1 - 2C' \left( 1 + \frac{\gamma v_{Ac}^2 R_c}{GM} \right)}} \quad (3.46)$$

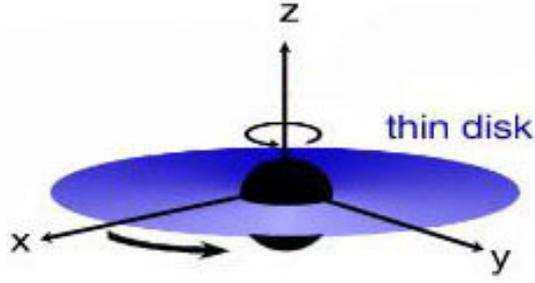


Figura 3.2: Modello di Disco Sottile

dove  $R_+$  corrisponde al punto più esterno del toro e  $R_-$  al punto più interno. Una misura della distorsione  $d$  del toro ci è data dalla quantità adimensionale

$$d = \frac{\frac{1}{2}(R_+ + R_-)}{R_c} = (2C')^{-1} \quad (3.47)$$

Più è grande  $d$ , più la sezione del toro si discosta dalla forma circolare e quindi il toro diventa più disteso.

### 3.3 Disco di accrescimento sottile - Equilibrio kepleriano

In molti casi il flusso di gas del disco è molto confinato al piano orbitale (figura 3.2). In questo caso, se indichiamo  $H$  e  $R_*$  le scale tipiche verticale e radiale del disco, si ha:

$$H \ll R_* \quad (3.48)$$

Quando è soddisfatta la condizione (3.48) si dice che siamo nell' *approssimazione di disco sottile*. In tale approssimazione il potenziale gravitazionale  $\Phi(R, z)$ , diventa:

$$\Phi = -\frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \approx -\frac{GM}{R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right) \quad (3.49)$$

e pertanto le componenti  $R$  e  $z$  del campo di gravità diventano:

$$\begin{aligned} g_R &= -\frac{\partial\Phi}{\partial R} \approx -\frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{3z^2}{2R^2}\right) \approx -\frac{GM}{R^2} \\ g_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \approx -\frac{GMz}{R^3} \left(1 - \frac{3z^2}{2R^2}\right) \approx -\frac{GMz}{R^3} \end{aligned}$$

Come prima, facciamo l'ipotesi *politropico*  $P = K\rho^\gamma$  in modo tale che la velocità angolare sia indipendente dalla coordinata  $z$  ( $\Omega = \Omega(R)$ ).

Sotto queste assunzioni i campi di densità, pressione e velocità all'equilibrio possono essere scritti

$$\rho = \rho(R, z) \quad P = P(R, z) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\Omega(R) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

dove  $R\Omega(R) = u_\phi(R)$ . L'equazione di equilibrio (3.2), scritta in componenti, si riduce a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{GM}{R^2} + \Omega^2 R \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GMz}{R^3} \quad (3.52)$$

Nell'approssimazione di disco sottile è inoltre possibile assumere un *equilibrio Kepleriano* cioè un equilibrio in cui la velocità azimutale (o la velocità angolare) è:

$$u_\phi = u_{kep} = \left(\frac{GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{o} \quad \Omega = \Omega_{kep} = \frac{(GM)^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}} \quad (3.53)$$

Questo tipo di equilibrio corrisponde ad una situazione in cui il gradiente di pressione radiale può essere trascurato rispetto alle altre forze lungo  $R$  in modo tale che l'equazione di equilibrio radiale (3.10) diventa

$$\frac{GM}{R^2} = \Omega R \quad (3.54)$$

e che quindi la velocità azimutale si riduca a quella kepleriana (3.53). Verifichiamo questa assunzione facendo un'analisi dimensionale delle equazioni idrostatica indicando con  $H$  e  $R_*$  le scale tipiche verticale e radiale del disco e assumendo una relazione isoterma  $P \sim c_s^2 \rho$  dove  $c_s$  è la velocità del suono isoterma. L'equazione (3.52) ci da:

$$\frac{c_s^2}{H} \cong \frac{GMH}{R_*^3}$$

da cui segue:

$$c_s \ll \left(\frac{GM}{R_*}\right)^{1/2} \quad (3.55)$$

cioè la velocità kepleriana locale in un disco sottile è *altamente supersonica*. Facendo ora il rapporto tra il termine di pressione e il termine di gravità dell'equazione (3.51) si ottiene:

$$\frac{c_s^2/R}{GM/R^2} \cong \frac{c_s^2}{\frac{GM}{R}}$$

che è molto piccolo e quindi ci permette di trascurare il gradiente di pressione radiale rispetto alla forza di gravità lungo  $R$ .

Quindi mettendoci nell'approssimazione di disco sottile abbiamo che la velocità azimutale  $u_{\phi 0}$  è Kepleriana e altamente supersonica.

### 3.3.1 Stratificazione verticale del disco sottile - Modelli politropici

Vediamo qui due modelli di fluidi che vengono spesso utilizzati per costruire gli equilibri: gas adiabatico ( $n = 3/2$  per un gas monoatomico) e gas isoterma ( $n \rightarrow \infty$ )

- **Modello adiabatico**

Un importante modello di disco che viene usato è il *disco adiabatico* in cui si assume che la pressione e la densità sono legati dall'equazione politropica (3.12) con  $\gamma = 5/3$  per un gas adiabatico monoatomico.

Con questa equazione le onde sonore si propagano con velocità  $c_s$  data da:

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = \frac{\gamma kT}{\mu m_H}$$

Sostituendo questa relazione nell'equazione di equilibrio verticale si ha:

$$\frac{K}{\rho} \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial z} = -\Omega^2 z$$

da cui

$$K \gamma \rho^{\gamma-2} d\rho = -\Omega^2 z dz$$

integrando questa equazione si ottiene il *profilo di densità* e poi il *profilo di pressione* (elevando alla  $\gamma$ ):

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{z^2}{H_s^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.56)$$

$$P = P_0 \left(1 - \frac{z^2}{H_s^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.57)$$

dove  $\rho_0$  e  $P_0 = K\rho_0^\gamma$  sono la densità e la pressione a  $z = 0$  e  $H_s$  è l'*altezza scala politropica* che rappresenta l'altezza alla quale la densità e pressione si annullano ed è data da:

$$H_s^2 = \frac{2\gamma P_0}{(\gamma - 1)\Omega^2 \rho_0}$$

• **Modello isoterma**

Un altro modello di disco è il *disco isoterma* in cui si fa l'assunzione che la temperatura del fluido  $T$  è costante all'interno di un certo strato. In tale strato si ha quindi, usando la legge dei gas perfetti (3.11), la relazione isoterma:

$$P = \frac{kT}{\mu m_H} \rho \quad (3.58)$$

Con questa equazione le onde sonore si propagano con velocità  $c_s$  data da:

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{kT}{\mu m_H}$$

da cui la relazione isoterma diventa  $P = v_s^2 \rho$ . Sostituendo questa relazione nell'equazione di equilibrio verticale si ha:

$$\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\Omega^2 z$$

da cui

$$\frac{d\rho}{\rho} = d \log \rho = -\frac{\Omega^2}{c_s^2} z dz$$

integrando questa equazione si ottiene il *profilo di densità* e poi il *profilo di pressione* (moltiplicando per  $c_s^2$ ):

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{z^2}{H^2}} \quad (3.59)$$

$$P = P_0 e^{-\frac{z^2}{H^2}} \quad (3.60)$$

dove  $\rho_0$  e  $P_0 = c_s^2 \rho_0$  sono la densità e la pressione a  $z = 0$  e  $H$  è l'*altezza scala isoterma* che rappresenta l'altezza alla quale la densità e la pressione diminuiscono di un fattore  $e$  ed è data da:

$$H = \sqrt{2} c_s / \Omega$$

Tale quantità è pertanto una buona misura dello spessore del disco.

## Capitolo 4

# STABILITÀ LINEARE IDRODINAMICA

In questo capitolo discutiamo la stabilità di un fluido non magnetizzato in rotazione differenziale soggetto a una perturbazione lineare. Tale analisi ci porterà, in approssimazione locale e restringetoci a perturbazioni assisimetriche, al criterio di stabilità di Høiland il quale afferma che un fluido non magnetizzato in rotazione differenziale è localmente stabile rispetto a una perturbazione lineare assisimetrica se e solo se l'entropia specifica non decresce verso l'esterno e il momento angolare specifico aumenta col raggio lungo le superfici di entropia costante. Questo risultato è più che sufficiente a garantire la stabilità locale e lineare per modelli di dischi Kepleriani politropici ( $s = \text{cost}$ ,  $\ell \sim R^{1/2}$ ).

### 4.1 Concetto di Instabilità

Nel precedente capitolo abbiamo visto che all'equilibrio tutte le grandezze fisiche assumono un insieme di ben precisi valori i quali definiscono uno stato in cui le forze in gioco hanno una risultante nulla. L'esistenza di un equilibrio però, non garantisce la sua stabilità infatti qualora uno o più di questi valori vengono variati, l'equilibrio non può essere mantenuto ed il sistema evolve dinamicamente.

Noi qui ci limiteremo ad un'*analisi di stabilità lineare* cioè analizzeremo la dinamica di un equilibrio soggetto a piccole perturbazioni (piccole nel senso specificato nel paragrafo 2.4). La domanda a cui vogliamo in pratica rispondere è la seguente: se il sistema viene linearmente perturbato, la perturbazione diminuirà gradualmente in modo tale che il sistema ritorni allo stato di equi-

librio o crescerà in ampiezza in modo tale che il sistema progressivamente si allontani dallo stato di equilibrio senza mai ritornarci? Nel primo caso, l'equilibrio è detto *stabile*, nel secondo caso l'equilibrio è detto *instabile*. Il caso intermedio, cioè quello in cui la perturbazione non cambia il perfetto bilanciamento delle forze, viene chiamato *equilibrio marginale*.

E' importante osservare che un sistema può essere considerato stabile solo se lo è rispetto a *qualunque* perturbazione mentre deve essere considerato instabile anche se lo è rispetto ad *un solo* tipo di perturbazione.

Ma cosa sarà in grado di dirci l'analisi di stabilità lineare sulle sorti del nostro sistema? Nel complesso potrà dirci se il sistema tenderà a tornare verso la posizione di equilibrio, dando origine ad una dinamica oscillatoria, o ad allontanarsene, ma non potrà dirci nulla sullo stato finale dell'evoluzione infatti, se l'analisi lineare porta a una crescita in ampiezza delle perturbazioni, non è detto che si abbia la *transizione alla turbolenza* poichè può succedere che la perturbazione cresca fino ad ampiezze finite e raggiunga un nuovo stato di equilibrio. La teoria lineare può al meglio descrivere solo l'inizio del processo di transizione alla turbolenza. Inoltre un flusso reale può essere stabile a perturbazioni infinitesime (stabilità lineare) ma possono anche essere instabili a perturbazioni sufficientemente grandi (instabilità non lineare). Queste limitazioni dell'analisi di stabilità lineare devono sempre essere tenuti presenti.

## 4.2 Stabilità di sistemi in rotazione differenziale

Nel 1917 Rayleigh dimostrò, che un fluido inviscido incompressibile in rotazione differenziale è stabile a condizione che il momento angolare aumenti allontanandosi dall'asse di rotazione (tale condizione di stabilità è stata poi generalizzata da Solberg al caso di un fluido barotropico). Nel prossimo paragrafo dimostreremo questo risultato utilizzando un'analisi perturbativa lineare. Qui mostriamo come tale condizione di stabilità può essere facilmente spiegata sfruttando il *principio di conservazione del momento angolare* di ciascuna particella di fluido quando questa è leggermente spostata dalla sua posizione di equilibrio.

Consideriamo un fluido di densità uniforme in rotazione differenziale intorno ad un asse di simetria; sia  $u_\phi(R)$  il profilo di velocità stabilito dall'equilibrio tra forze di gravità e di pressione. Si consideri in particolare un elemento fluido che ha velocità di rotazione  $u_{\phi 0}$  al raggio  $R_0$  e lo si allontani dall'asse

di rotazione portandolo al raggio  $R_1 > R_0$ . Per la conservazione del momento angolare la sua velocità di rotazione diverrà  $(\frac{R_0}{R_1})u_{\phi 0}$  cui corrisponderà una forza centrifuga  $(\frac{R_0^2}{R_1^3})u_{\phi 0}^2$ . Si hanno essenzialmente tre possibilità sulle sorti dell'elemento di fluido in base alla relazione tra la sua nuova velocità e quella prevista dalla configurazione di equilibrio iniziale cioè  $u_{\phi 1}$ :

1. l'elemento rimarrà in equilibrio nella posizione raggiunta se la nuova velocità è uguale a  $u_{\phi 1}$
2. l'elemento verrà spinto a raggi ancora maggiore (instabilità) se la nuova velocità è maggiore di  $u_{\phi 1}$
3. l'elemento verrà spinto verso la posizione originaria  $R_0$  (stabilità) se la nuova velocità è minore di  $u_{\phi 1}$

Pertanto la condizione di stabilità di un sistema in rotazione differenziale può essere scritta, in termini di forze centrifughe, come:

$$\frac{R_0^2 u_{\phi 0}^2}{R_1^3} < \frac{u_{\phi 1}^2}{R_1}$$

ossia, usando la velocità angolare  $\Omega = u_{\phi}/r$ :

$$(R_0^2 \Omega_0^2)^2 < (R_1^2 \Omega_1^2)^2 \quad (4.1)$$

Il calcolo perturbativo, come ora vedremo, porta alla condizione di stabilità perfettamente equivalente ( $\frac{d(R^2 \Omega)^2}{dR} > 0$ ) che è nota come *criterio di Rayleigh*.

### 4.3 Analisi di stabilità lineare

Consideriamo un fluido non magnetizzato in rotazione differenziale in *equilibrio assisimmetrico stazionario*. In tale equilibrio i campi di densità, pressione, e velocità sono

$$\rho = \rho(R, z) \quad P = P(R, z) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\Omega(R, z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Sottoponiamo ora questo stato ad una *piccola perturbazione* e vediamo come tale perturbazione evolve nel tempo. La dinamica di ciascun elemento di fluido è descritta, come abbiamo visto nel capitolo 2, dal seguente sistema di

equazioni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\nabla P - \rho \nabla \Phi \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P &= -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{u}\end{aligned}\quad (4.3)$$

Inseriamo nel sistema (4.3) per ogni generico campo  $f$  il valore di tale campo all'equilibrio più la perturbazione ( $f(R, z) + \delta f(R, \phi, z, t)$ ) e linearizziamo le equazioni (teniamo solo i termini del primo ordine). Si noti che il campo di gravità non è perturbato ( $\delta \Phi = 0$ ) poichè abbiamo considerato solo quello esterno che è indipendente dalle perturbazioni presenti nel fluido. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \delta \mathbf{u} + \delta \rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \delta P - \frac{\delta \rho}{\rho^2} \nabla P \\ \frac{\partial \delta P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta P + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) P &= -\gamma P (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}) - \gamma \delta P (\nabla \cdot \mathbf{u})\end{aligned}$$

scritte in componenti sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \rho \delta u_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \delta u_\phi + \delta \rho R \Omega) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \delta u_z) &= 0 \\ \frac{\partial \delta u_R}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \delta u_R}{\partial \phi} - 2\Omega \delta u_\phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial R} + \frac{\delta \rho}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial R} \\ \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial \phi} + \left( \frac{\partial (\Omega R)}{\partial R} + \Omega \right) \delta u_R + R \frac{\partial \Omega}{\partial z} \delta u_z &= -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial \delta P}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \delta u_z}{\partial \phi} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial z} + \frac{\delta \rho}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial \delta P}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \delta P}{\partial \phi} + \delta u_R \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\delta u_\phi}{R} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \delta u_z \frac{\partial P}{\partial z} &= -\gamma P \left( \frac{1}{R} \frac{\partial (R \delta u_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Queste equazioni descrivono l'evoluzione delle perturbazioni e la loro risoluzione sarà in grado di dirci se il sistema è stabile o no.

La linearità del sistema ci permette, per risolverlo, di utilizzare il *metodo dei modi normali* (APPENDICE B). Poichè i coefficienti di queste equazioni lineari (i campi all'equilibrio) dipendono dalle coordinate  $R$  e  $z$ , la trasformata di Fourier può essere applicata solo alle coordinate  $\phi$  e  $t$ . Quindi un generico campo perturbato  $\delta f$  può essere decomposto in componenti di Fourier nella forma:

$$\delta f(R, \phi, z, t) = \delta f_k(R, m, z, \omega) e^{im\phi - i\omega t} \quad (4.4)$$

dove  $m$  è il numero d'onda azimutale (un intero) e  $\omega$  è la frequenza d'onda. Sostituiamo ora i modi normali nelle equazioni linearizzate ottenendo il seguente sistema di equazioni per le trasformate (per semplicità di notazione indichiamo con  $\delta f$  invece che con  $\delta f_k$  la trasformata di Fourier del generico campo perturbato  $\delta f$  e omettiamo la dipendenza  $(R, m, z, \omega)$  nelle ampiezze di Fourier):

$$-i\bar{\omega}\delta\rho + \delta\mathbf{u} \cdot \nabla\rho = -\rho \left( \frac{1}{R} \frac{\partial(R\delta u_R)}{\partial R} + \frac{im\delta u_\phi}{R} + \frac{\partial\delta u_z}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} -i\bar{\omega}\delta u_R - 2\Omega\delta u_\phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\delta P}{\partial R} + \frac{\delta\rho}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial R} \\ -i\bar{\omega}\delta u_\phi + \frac{1}{R} \delta\mathbf{u} \cdot \nabla(R^2\Omega) &= -\frac{im\delta P}{\rho R} \\ -i\bar{\omega}\delta u_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\delta P}{\partial z} + \frac{\delta\rho}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

$$-i\bar{\omega}\delta P + \delta\mathbf{u} \cdot \nabla P = -\gamma P \left( \frac{1}{R} \frac{\partial(R\delta u_R)}{\partial R} + \frac{im\delta u_\phi}{R} + \frac{\partial\delta u_z}{\partial z} \right)$$

dove  $\bar{\omega} = \omega - m\Omega_0$  è la *frequenza dell'onda Doppler sciftata* cioè la frequenza misurata in un sistema di riferimento che ruota con la velocità angolare locale del fluido.

Possiamo combinare queste equazioni in una singola equazione differenziale. Eliminiamo, innanzitutto,  $\delta u_\phi$  e  $\delta\rho$  per ottenere:

$$(\bar{\omega}^2 - A) \delta u_R - B\delta u_z = -\frac{i\bar{\omega}}{\rho} \left( \frac{\partial\delta P}{\partial R} - \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\delta P}{\gamma P} \right) + 2\Omega \frac{im\delta P}{\rho R} \quad (4.5)$$

$$-C\delta u_R + (\bar{\omega}^2 - D) \delta u_z = -\frac{i\bar{\omega}}{\rho} \left( \frac{\partial\delta P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\delta P}{\gamma P} \right) \quad (4.6)$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\Omega}{R} \frac{\partial(R^2\Omega)}{\partial R} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} \left( \frac{1}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial R} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial R} \right) \\ B &= \frac{2\Omega}{R} \frac{\partial(R^2\Omega)}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} \left( \frac{1}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} \right) \\ C &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{1}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial R} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial R} \right) \\ D &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{1}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

i quali, come si vede, coinvolgono i gradienti verticali e radiali del momento angolare specifico ( $\ell = R^2\Omega$ ) e dell'entropia specifica ( $s = c_p(\gamma^{-1} \ln P - \ln \rho) +$

costante per un gas ideale politropico). Si può far vedere che  $B = C$  così che la matrice  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  è simmetrica. Infatti prendendo il rotore dell'equazione di equilibrio (3.8) si ottiene

$$-R \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} \mathbf{e}_\phi = \nabla P \times \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

da cui si deduce facilmente che  $B = C$ . Possiamo poi eliminare  $\delta u_R$  e  $\delta u_z$  ottenendo la seguente equazione differenziale parziale del secondo ordine

$$(\bar{\omega}^2 - D) \frac{\partial^2 \delta P}{\partial R^2} + 2B \frac{\partial^2 \delta P}{\partial R \partial z} + (\bar{\omega}^2 - A) \frac{\partial^2 \delta P}{\partial z^2} + (\text{termini in } \delta P \text{ e } \nabla P) = 0 \quad (4.7)$$

Questa è un'equazione abbastanza complicata ma molto generale che descrive il comportamento di una generica perturbazioni lineari in un flusso in rotazione differenziale assisimmetrico in un campo gravitazionale di una massa centrale.

#### 4.4 Analisi locale

È possibile ottenere una relazione di dispersione algebrica facendo un' *analisi di stabilità locale*. Questa analisi, come vedremo, è però valida solo per perturbazioni con lunghezze d'onda corte.

Per questo scopo scegliamo un punto all'interno del sistema  $\mathbf{r}_0 = (R_0, \phi_0, z_0)$  e intorno ad esso espandiamo tutte le quantità di equilibrio in serie di Taylor mantenendo solo i termini di ordine zero delle coordinate  $\xi_R = R - R_0$  e  $\xi_z = z - z_0$ . Si ottiene un'equazione differenziale parziale del secondo ordine lineare nelle variabili locali per le quantità perturbate con *coefficienti costanti*

$$(\bar{\omega}^2 - D) \frac{\partial^2 \delta P}{\partial \xi_R^2} + 2B \frac{\partial^2 \delta P}{\partial \xi_R \partial \xi_z} + (\bar{\omega}^2 - A) \frac{\partial^2 \delta P}{\partial \xi_z^2} + (\text{termini in } \delta P \text{ e } \nabla P) = 0 \quad (4.8)$$

dove ora  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sono valutati nel punto  $(R_0, z_0)$ . Questa è una buona approssimazione purchè le deviazioni  $(\xi_R, \xi_z)$  siano piccole comparate alle *scale di lunghezza caratteristiche* nelle direzioni radiali e verticali  $(L_R, L_z)$  cioè alle scale di lunghezza sulla quale ci sono significative variazioni nelle quantità all'equilibrio. Quindi la condizione di validità dell'analisi locale è

$$\xi_R \ll L_R \quad \xi_z \ll L_z \quad (4.9)$$

In questo limite possiamo quindi decomporre in componenti di Fourier il campo perturbato  $\delta P$  anche nelle altre due coordinate spaziali, cioè possiamo scrivere:

$$\delta P(\xi_R, \xi_z) = \delta P_k(k_R, k_z) e^{i(k_R \xi_R + k_z \xi_z)} \quad (4.10)$$

dove  $k_R$  e  $k_z$  sono rispettivamente i numeri d'onda radiale e verticale (sono interi). Sostituendo i modi normali nell'equazione linearizzata (4.8), otteniamo la seguente equazione per la trasformata  $\delta P_k$  (per semplicità di notazione indichiamo con  $\delta P$  invece che con  $\delta P_k$  la trasformata di Fourier di  $\delta P$  e omettiamo la dipendenza  $(k_R, k_z)$ )

$$-(\bar{\omega}^2 - D) k_R^2 - 2Bk_Rk_z - (\bar{\omega}^2 - A) k_z^2 = 0 \quad (4.11)$$

Questo poichè le derivate seconde sono i termini più grandi. L'equazione (4.11) fornisce la *relazione di dispersione locale* per il fluido. Per consistenza, la validità dell'analisi è ora ristretta ai modi con numeri d'onda tali che:

$$k_R L_R \gg 1 \quad k_z L_z \gg 1 \quad (4.12)$$

Indicando con  $\mathbf{e} = (k_z/|\mathbf{k}|)\mathbf{e}_R - (k_R/|\mathbf{k}|)\mathbf{e}_z$  un vettore unitario meridionale ortogonale a  $\mathbf{k}$ , la soluzione della relazione di dispersione è

$$\bar{\omega}^2 = Ae_R^2 + 2Be_Re_z + De_z^2 = Q(\mathbf{e}) \quad (4.13)$$

dove  $Q$  è la forma quadratica associata alla matrice  $M$  ( $Q(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \cdot M \cdot \mathbf{e}$ ). Questo mostra che pacchetti d'onda piane localizzate possono esistere con lunghezze d'onda arbitrariamente corte, a condizione che

$$\lambda_- < \bar{\omega}^2 < \lambda_+$$

dove  $\lambda_{\pm}$  sono gli autovalori di  $\mathbf{M}$  che si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica  $|\mathbf{M} - \lambda I| = 0$  cioè l'equazione:

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + AD - B^2 = 0 \quad (4.14)$$

Se  $\lambda_- < 0$ , comunque, ci sono soluzioni di questa forma che crescono esponenzialmente nel tempo, indicando *instabilità*.

## 4.5 Criterio di Solberg-Høiland

Può essere utile introdurre lo spostamento lagrangiano  $\boldsymbol{\xi}$  che è legato alla perturbazione di velocità euleriana  $\delta \mathbf{u}$  dalla relazione:

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \delta u_R &= -i\bar{\omega} \xi_R \\ \delta u_\phi &= -i\bar{\omega} \xi_\phi - R \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Omega \\ \delta u_z &= -i\bar{\omega} \xi_z \end{aligned}$$

Le equazioni (4.5) e (4.6) diventano allora:

$$(\bar{\omega}^2 - A) \xi_R - B \xi_z = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \delta P}{\partial R} - \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\delta P}{\gamma P} \right) + 2\Omega \frac{im \delta P}{\rho R} \quad (4.15)$$

$$-B \xi_R + (\bar{\omega}^2 - D) \xi_z = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \delta P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\delta P}{\gamma P} \right) \quad (4.16)$$

dove la perturbazione di pressione euleriana  $\delta P$  è data in termini di  $\boldsymbol{\xi}$  dall'equazione

$$\delta P = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P - \gamma P \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$$

Le equazioni (4.15) e (4.16) per la trasformata di Fourier della  $\boldsymbol{\xi}(k_R, m, k_z, \omega)$  (ricordiamo che abbiamo eliminato il pedice 'k' alle trasformate) costituiscono un *problema agli autovalori* per  $\omega$  ma non è *autoaggiunto* o *Hermitiano* tranne quando  $m = 0$  (ricordiamo che una condizione necessaria affinché gli autovalori siano numeri reali, è che si abbia un operatore Hermitiano). Noi qui ci limitiamo al caso  $m = 0$  che corrisponde a una *perturbazione assisimmetrica*. Le equazioni (4.15) e (4.16) allora diventano

$$(\bar{\omega}^2 - A) \xi_R - B \xi_z = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \delta P}{\partial R} - \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\delta P}{\gamma P} \right) \quad (4.17)$$

$$-B \xi_R + (\bar{\omega}^2 - D) \xi_z = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \delta P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\delta P}{\gamma P} \right) \quad (4.18)$$

Mostriamo ora che in questo caso l'operatore lineare, rappresentato dalla matrice simmetrica  $\mathbf{M}$ , è Hermitiano ( $\Rightarrow \omega^2$  reale). Moltiplichiamo la prima equazione per  $\rho \xi_R^*$  e la seconda per  $\rho \xi_z^*$  (dove  $\xi_R^*, \xi_z^*$  sono i complessi coniugati di  $\xi_R, \xi_z$ ) e integriamo sul volume  $V$  del fluido (usando le condizioni al contorno  $\delta P = 0$ ) per ottenere:

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_V \rho (|\xi_R|^2 + |\xi_z|^2) dV &= \int_V \left[ \rho Q(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}^* \cdot \nabla \delta P - \frac{\delta P}{\gamma P} \boldsymbol{\xi}^* \cdot \nabla P \right] dV \\ &= \int_V \left[ \rho Q(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\delta P}{\gamma P} (\gamma P \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^* + \boldsymbol{\xi}^* \cdot \nabla P) \right] dV \\ &= \int_V \left( \rho Q(\boldsymbol{\xi}) + \frac{|\delta P|^2}{\gamma P} \right) dV \end{aligned} \quad (4.19)$$

dove

$$Q(\boldsymbol{\xi}) = A |\xi_R|^2 + B (\xi_R^* \xi_z + \xi_z^* \xi_R) + D |\xi_z|^2 = (\xi_R^* \xi_z^*) \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_R \\ \xi_z \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

è ora la forma Hermitiana associata con la matrice  $\mathbf{M}$ . La relazione integrale (4.19) mostra perciò che  $\omega^2$  è reale.

Poi il *principio variazionale* (Tassoul 1978) assicura che l'instabilità per perturbazioni assisimmetriche si presenta se e solo se l'integrale sul lato destro può, per un adeguato spostamento  $\xi$ , diventare negativo. Questo implica che se  $Q$  è definito positivo ( $\Rightarrow \omega^2 > 0$ ), possiamo concludere che la configurazione di equilibrio (4.2) è dinamicamente stabile a una perturbazione assisimmetrica. Ora gli autovalori  $\lambda_{\pm}$  di  $\mathbf{M}$  sono entrambi positivi se e solo se:

$$A + D > 0 \quad (4.21)$$

$$AD - B^2 > 0 \quad (4.22)$$

Se queste condizioni sono soddisfatte in ogni parte del fluido allora  $Q > 0$  ( $\Rightarrow \omega^2 > 0$ ) così che il fluido è stabile a una perturbazione assisimmetrica.

Usando  $\ell = R^2\Omega$  (momento angolare specifico) e  $s = c_p(\gamma^{-1}\ln P - \ln\rho) +$  costante (entropia specifica per un gas ideale politropico), abbiamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{\ell}{R^3} \frac{\partial \ell^2}{\partial R} - \frac{g_R}{c_p} \frac{\partial s}{\partial R} \\ B &= \frac{\ell}{R^3} \frac{\partial \ell^2}{\partial z} - \frac{g_R}{c_p} \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{g_z}{c_p} \frac{\partial s}{\partial R} \\ D &= -\frac{g_z}{c_p} \frac{\partial s}{\partial z} \end{aligned}$$

così che le due condizioni diventano

$$\frac{1}{R^3} \frac{\partial \ell^2}{\partial R} - \frac{1}{c_p} \mathbf{g} \cdot \nabla s > 0 \quad (4.23)$$

$$-g_z \left( \frac{\partial \ell^2}{\partial R} \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial \ell^2}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial R} \right) > 0 \quad (4.24)$$

Questi sono i *criteri di stabilità di Høiland* e ci dicono che un fluido non magnetizzato in rotazione differenziale è dinamicamente stabile rispetto a una perturbazione assisimmetrica se e solo se sono soddisfatte le due seguenti condizioni: (1) l'entropia specifica  $s$  non decresca verso l'esterno e (2) il momento angolare specifico  $\ell$  aumenti con  $R$  lungo le superfici di entropia costante

Nel limite di rotazione nulla ( $\ell = 0$ ), le condizioni (4.23) e (4.24) si riducono al *criterio di Schwarzschild* per la stabilità convettiva

$$-\frac{1}{c_p} \mathbf{g} \cdot \nabla s \equiv N^2 > 0 \quad (4.25)$$

il quale implica che l'entropia cresce sempre verso l'esterno in un sistema sferico stabile.

Nel caso di un fluido barotropico ( $s = \text{costante}$ ) la condizione di stabilità (4.23) diventa

$$\frac{\partial \ell^2}{\partial R} > 0 \quad (4.26)$$

il quale afferma che il momento angolare specifico deve necessariamente aumentare con  $R$  per la stabilità. Questo è il *criterio di Solberg* e generalizza a un fluido barotropico il ben conosciuto *criterio di Rayleigh* per un fluido inviscido incompressibile.

L'analisi di stabilità lineare idrodinamica ci ha portato ad un criterio sufficiente per garantire la stabilità locale e lineare per modelli di dischi Kepleriani politropici ( $s = \text{cost}$ ,  $\ell \sim R^{1/2}$ ). Per questi sistemi pertanto un'analisi di stabilità lineare non spiega il trasporto di momento angolare verso l'esterno.

## Capitolo 5

# STABILITÀ LINEARE MAGNETOIDRODINAMICA

Nel precedente capitolo abbiamo visto che la stabilità, in un gas non magnetizzato in rotazione differenziale soggetto a una perturbazione lineare assisimmetrica, è governata dal criterio di Høiland (che si riduce al criterio di Rayleigh nel caso di entropia costante) da cui si è dedotto che un disco Kepleriano è localmente stabile a una perturbazione lineare assisimmetrica e quindi non spiega il trasportare del momento angolare verso l'esterno.

In questo capitolo mostriamo che l'aggiunta di un debole campo magnetico genera un criterio di instabilità che ha la stessa forma del caso puramente idrodinamico ma con i gradienti di momento angolare sostituiti dai gradienti della velocità angolare. In questo modo dischi Kepleriani che primario erano stabili sono ora localmente instabili a una perturbazione lineare assisimmetrica.

### 5.1 Instabilità magnetorotazionale

Prima di analizzare l'instabilità magnetorotazionale in una situazione molto generale vediamo un caso molto semplice che è meno formale ma che ci dà una descrizione più fisicamente intuitiva di questa instabilità la cui dinamica è molto semplice, invocando solo il concetto di tensione magnetica in presenza di una forza rotazionale.

#### 5.1.1 Calcolo formale

Il più semplice sistema fluido che mostra l'instabilità è un disco di gas assisimmetrico attraversato da un campo magnetico debole verticale  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ , dove

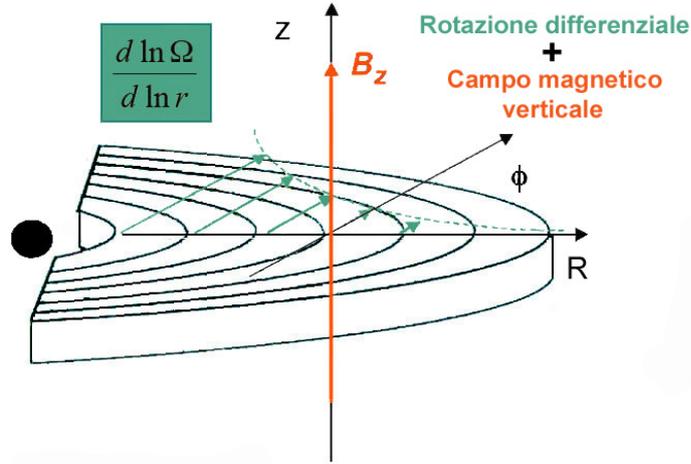


Figura 5.1: Schema di un disco ruotante assisimmetrico attraversato da un campo magnetico verticale

$\mathbf{e}_z$  è il versore nella direzione  $z$  (figura 5.1). Come abbiamo visto nel capitolo 3, il campo magnetico, se debole, non ha nessun effetto sull'equilibrio del disco che pertanto risulta bilanciato dalle forze gravitazionale e rotazionale (nel piano) e il flusso all'equilibrio consiste di elementi di fluido in orbite circolari. Immaginiamo ora di spostare un elemento di fluido dalla sua orbita di un valore  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_R, \xi_\phi, 0)$  nel piano del disco. La dipendenza spaziale e temporale dello spostamento è una semplice onda piana

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}' e^{ikz - i\omega t} \quad (5.1)$$

che definisce il numero d'onda verticale  $k$  e la frequenza angolare  $\omega$ .

Non è difficile mostrare che l'equazione di induzione porta a:

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) = ikB\boldsymbol{\xi} \quad \delta B_z = \xi_z = 0$$

e la forza di tensione magnetica per unità di massa è poi

$$\frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} = \frac{ikB}{4\pi\rho} \delta \mathbf{B} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \boldsymbol{\xi}$$

Questa è esattamente la forma di una *forza di tipo elastica*, linearmente proporzionale allo spostamento. In altre parole la tensione magnetica si comporta come se fosse una molla armonica, con una forza di richiamo opposta allo spostamento del fluido (figura 5.2).

Le forze di pressione non sono importanti poichè non c'è nessun gradiente di pressione della perturbazione nel piano del disco.

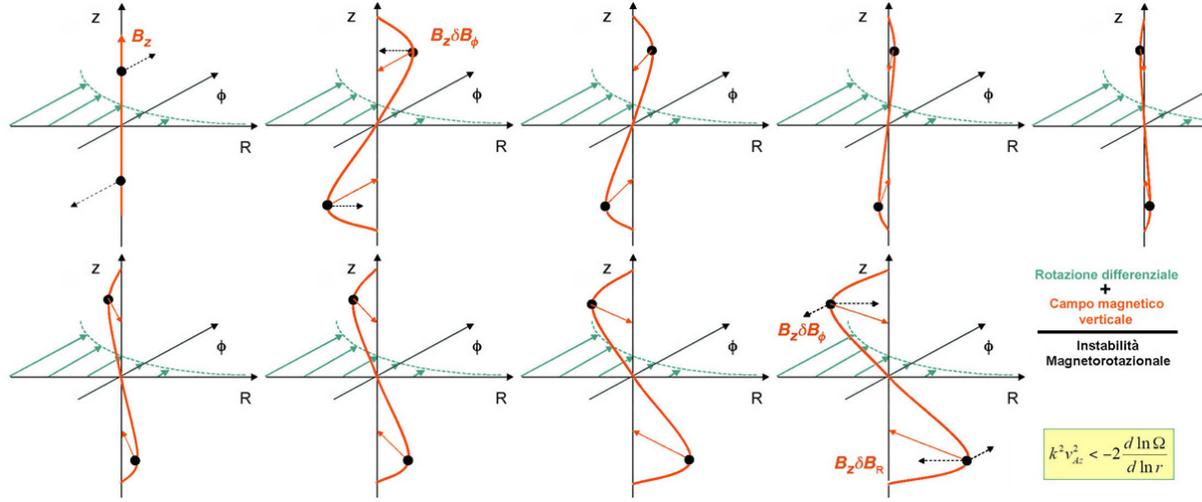


Figura 5.2: Evoluzione di una linea di campo magnetico nella MRI

Andiamo ora in un sistema di riferimento che ruota a una velocità angolare  $\Omega$  di un'orbita caratteristica. In questo sistema di riferimento, in aggiunta alla forza tensione magnetica, dobbiamo aggiungere la forza di Coriolis  $-2\Omega \times d\boldsymbol{\xi}/dt$  e la forza centrifuga  $R\Omega^2 \mathbf{e}_R$ . Il secondo è esattamente bilanciato dalla forza gravitazionale solo nella posizione dell'orbita caratteristica e la residua forza mareale ammonta a  $-\boldsymbol{\xi} d\Omega^2/d \ln R$ . Le equazioni del moto per lo spostamento dell'elemento di fluido sono quindi:

$$\ddot{\xi}_R - 2\Omega \dot{\xi}_\phi = - \left( \frac{d\Omega^2}{d \ln R} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right) \xi_R$$

$$\ddot{\xi}_\phi - 2\Omega \dot{\xi}_R = - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \xi_\phi$$

dove i termini  $\Omega$  e  $d\Omega^2/d \ln R$  sono ora quantità costanti visto che il nostro calcolo è locale. Queste equazioni, che sono le equazioni WKB per un numero d'onda verticale in un disco magnetizzato, sono anche le equazioni che descrivono due masse puntiformi connessi da una molla con costante elastica  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2$  che orbitano. Le soluzioni di queste equazioni, nella forma di onde piane (5.1), soddisfano la relazione di dispersione

$$\omega^4 - \omega^2 (\kappa^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \left( (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d \ln R} \right) = 0$$

Quando il campo magnetico non c'è ritroviamo la relazione  $\omega^2 = \kappa^2$ . Quando invece non c'è rotazione ritroviamo la doppia radice  $\omega^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2$ , i modi di Alfvén e lenti. Ma la caratteristica realmente rilevante di questa relazione

di dispersione è che per numeri d'onda abbastanza piccoli l'ultimo termine costante nell'equazione quartica sarà sempre negativo se la velocità angolare decresce verso l'esterno. Questo significa che uno dei modi, e può essere mostrato che corrisponde alle onde lente, è instabile. Questa è l'instabilità magnetorotazionale o MRI.

A piccoli  $k$  il tasso di crescita della instabilità cresce linearmente con  $k$  ma quando

$$k^2 v_A^2 > \left| \frac{d\Omega^2}{d \ln R} \right|$$

il tasso di crescita va a zero e l'instabilità non è più presente. Perciò ci sono dei valori di  $k$  per il quale il tasso di crescita è massimo. Per un disco Kepleriano questo tasso di crescita massimo è  $0.75\Omega$  a  $kv_A = 0.97\Omega$ . Il tasso di crescita massimo è indipendente dall'intensità del campo magnetico. Il campo magnetico semplicemente stabilisce la scala del numero d'onda alla quale il tasso di crescita è massimizzato ma non influisce sulla magnitudine del tasso di crescita stesso. Secondo il nostro risultato qualunque campo magnetico destabilizzerà il disco con le ampiezze dei modi più instabili che crescono di un fattore in eccesso di 100 ciascuna orbita.

La relazione di dispersione può essere risolta esattamente per  $\omega(k)$  e analizzata in dettaglio. Il modo della relazione di dispersione che aumenta più veloce avviene quando:

$$(kv_A)^2 = -\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\kappa^2}{4\Omega} \right) \left( \frac{d\Omega^2}{d \ln R} \right)$$

e corrisponde a

$$|\omega_{max}| = \frac{1}{2} \left| \frac{d\Omega}{d \ln R} \right|$$

Abbiamo già notato che per un disco Kepleriano, questo è  $kv_A = 0.97\Omega$  e  $|\omega_{max}| = 0.75\Omega$ . Il fattore di amplificazione esponenziale è impressionante. In termini del periodo orbitale  $T$

$$e^{0.75*2\pi t/T} = e^{4.712t/T}$$

o un fattore di 111 per ciascuna orbita. Ricordiamo che questo è indipendente dall'intensità del campo magnetico.

### 5.1.2 Descrizione qualitativa

Perché una semplice forza di tipo elastico, la cui intensità è linearmente proporzionale alla distanza, risulta una così potente instabilità? Poiché il campo

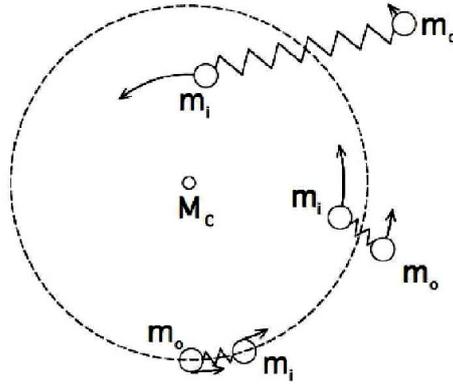


Figura 5.3: Analogia del caso di due masse connesse da una molla

magnetico è esattamente analogo alla molla, consideriamo il comportamento di due masse  $m_i$  e  $m_o$  connesse da una molla (figura 5.3). Supponiamo che  $m_i$  parte un pò più vicino alla massa centrale  $M_c$  e che quindi orbita leggermente più veloce di  $m_o$ . La molla si allunga e esercita un momento torcente su entrambe le masse tirando  $m_i$  verso l'interno e  $m_o$  verso l'esterno. Questo è il trasferimento di momento angolare da  $m_i$  a  $m_o$ . La perdita di momento angolare forza  $m_i$  ad un'orbita più vicina a  $M_c$  mentre il guadagno di momento angolare muove  $m_o$  verso l'esterno. In un'orbita più strettamente legata  $m_i$  si muove anche più velocemente mentre  $m_o$ , in un'orbita più distante, si muove più lentamente. La molla perciò continua ad allungarsi e il trasferimento di momento angolare è un processo che corre via. Il campo magnetico che lega i due elementi di fluido fa esattamente la stessa cosa che fa la nostra molla.

## 5.2 Analisi di stabilità lineare

Esaminiamo ora il comportamento della MRI in circostanze più generali. I risultati che otterremo saranno applicabili sia ad un disco spesso non-kepleriano che a un disco sottile kepleriano che a stelle in rotazione differenziale.

Consideriamo un gas ionizzato in rotazione differenziale in *equilibrio assisimmetrico* in presenza di un debole campo magnetico (vedi Cap. 3.2.1) (il gas deve essere sufficientemente ionizzato da essere ben accoppiato al campo magnetico). Il campo è debole nel senso che la velocità di Alfvén è piccola rispetto sia alla velocità del suono locale che alla velocità di rotazione locale così che gli effetti della forza magnetica sull'equilibrio sono trascurabili rispetto alle altre forze. Di conseguenza il campo magnetico può essere molto gen-

erale nello stato imperturbato. In tale equilibrio i campi di densità, pressione, velocità e magnetico sono

$$\rho = \rho(R, z) \quad P = P(R, z) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\Omega(R, z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_R(R, z) \\ B_\phi(R, z) \\ B_z(R, z) \end{pmatrix}$$

In generale, una rotazione differenziale fa sì che la componente azimutale  $B_\phi$  cresca linearmente nel tempo ma finché esso rimane debole, nel senso specificato prima, il suo effetto sulle perturbazioni assisimmetriche è trascurabile (Balbus, S.A., Hawley, J.F. 1991).

Sotto poniamo ora questo stato di equilibrio ad una *perturbazione lineare assisimmetrica* e vediamo come tale perturbazione evolve nel tempo. La dinamica di un fluido nell'approssimazione MHD ideale è descritta come abbiamo visto nel capitolo 2, dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\nabla \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \rho \nabla \Phi \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ \frac{\partial \ln (P \rho^{-\gamma})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \ln (P \rho^{-\gamma}) &= 0 \end{aligned}$$

Noi qui lavoreremo nell'*approssimazione di Bousinesq* che ci permette di semplificare molto l'analisi eliminando i modi magnetoacustici.

Inseriamo nel sistema (5.2) per ogni generico campo  $f$  il valore del campo all'equilibrio più la perturbazione ( $f(R, z) + \delta f(R, z, t)$ ) e linearizziamo le equazioni (teniamo solo i termini del primo ordine). Otteniamo nel limite di Bousinesq:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left( \delta P + \frac{\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}}{4\pi} \right) + \frac{1}{4\pi \rho} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} + (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \\ &\quad + \frac{\delta \rho}{\rho^2} \nabla \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi \rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \frac{\delta \rho}{\rho} \\ \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ -\frac{5}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \ln (P \rho^{-5/3}) &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

e scritte in componenti sono:

$$\frac{\delta u_R}{R} + \frac{\partial \delta u_R}{\partial R} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_R}{\partial t} - 2\Omega \delta u_\phi = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial R} - \frac{1}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial B_\phi}{\partial R} \delta B_\phi + B_\phi \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial R} + \frac{\partial B_z}{\partial R} \delta B_z + B_z \frac{\partial \delta B_z}{\partial R} \right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_z \frac{\partial \delta B_R}{\partial z} - 2 \frac{B_\phi \delta B_\phi}{R} + \delta B_z \frac{\partial B_R}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\delta \rho}{\rho^2} + \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_\phi \frac{\partial B_\phi}{\partial R} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) \frac{\delta \rho}{\rho} \\ & - \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_z \frac{\partial B_R}{\partial z} - \frac{B_\phi^2}{R} \right) \frac{\delta \rho}{\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial t} + \left( R \frac{\partial \Omega}{\partial R} + 2\Omega \right) \delta u_R + R \frac{\partial \Omega}{\partial z} \delta u_z = & \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_R \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial R} + B_z \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial z} + \frac{B_R \delta B_\phi}{R} \right. \\ & \left. + \delta B_R \frac{\partial B_\phi}{\partial R} + \delta B_z \frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{\delta B_R B_\phi}{R} \right) - \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_R \frac{\partial B_\phi}{\partial R} + B_z \frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{B_R B_\phi}{R} \right) \frac{\delta \rho}{\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial B_R}{\partial z} \delta B_R + B_R \frac{\partial \delta B_R}{\partial z} + \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \delta B_\phi + B_\phi \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial z} \right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_R \frac{\partial \delta B_z}{\partial R} + \delta B_R \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\delta \rho}{\rho^2} + \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_R \frac{\partial B_R}{\partial z} + B_\phi \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \frac{\delta \rho}{\rho} \\ & - \frac{1}{4\pi\rho} B_R \frac{\partial B_z}{\partial R} \frac{\delta \rho}{\rho} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \delta B_R}{\partial t} + \delta u_R \frac{\partial B_R}{\partial R} + \delta u_z \frac{\partial B_R}{\partial z} = B_R \frac{\partial \delta u_R}{\partial R} + B_z \frac{\partial \delta u_R}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial t} + \left( \frac{\partial B_\phi}{\partial R} + \frac{B_\phi}{R} \right) \delta u_R + \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \delta u_z = & B_R \left( \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial R} + \frac{\delta u_\phi}{R} \right) + B_z \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial z} \\ & + \left( R \frac{\partial \Omega}{\partial R} + 2\Omega \right) \delta B_R + R \frac{\partial \Omega}{\partial z} \delta B_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta B_z}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial R} \delta u_R + \frac{\partial B_z}{\partial z} \delta u_z = & B_R \frac{\partial \delta u_z}{\partial R} + B_z \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} \\ - \frac{5}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \delta u_R \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} + \delta u_z \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} = & 0 \end{aligned}$$

Queste equazioni descrivono l'evoluzione delle perturbazioni e la loro risoluzione sarà in grado di dirci se il sistema è stabile o no. I coefficienti in queste equazioni lineari (i campi di base) dipendono in generale da  $R$  e  $z$ . Perciò a questo punto la scomposizione delle perturbazioni in componenti di Fourier non ci dà nessuna particolare semplificazione del problema. Infatti

prendendo la trasformata di Fourier di una qualunque di queste equazioni, si ottiene la somma di convoluzioni delle trasformate di Fourier delle quantità di base e perturbate.

Ulteriori progressi possono essere fatti se restringiamo le lunghezze d'onda delle perturbazioni per la quale la nostra analisi di stabilità è valida. Per questo scopo facciamo un'analisi di stabilità locale cioè scegliamo un punto all'interno del sistema  $\mathbf{r}_0 = (R_0, \phi_0, z_0)$  (la scelta di un particolare valore di  $\phi_0$  è naturalmente irrilevante nel caso assisimmetrico che stiamo studiando) e intorno ad esso espandiamo tutte le quantità di equilibrio in serie di Taylor mantenendo solo i termini di ordine zero delle coordinate  $\xi_R = R - R_0$  e  $\xi_z = z - z_0$  per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_R}{R_0} + \frac{\partial \delta u_R}{\partial \xi_R} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial \xi_z} &= 0 \\ \frac{\partial \delta u_R}{\partial t} - 2\Omega_0 \delta u_\phi + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial \xi_R} + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial R} \right|_0 \delta B_\phi + B_\phi^0 \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial \xi_R} + \left| \frac{\partial B_z}{\partial R} \right|_0 \delta B_z + B_z^0 \frac{\partial \delta B_z}{\partial \xi_R} \right) \\ - \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( B_z^0 \frac{\partial \delta B_R}{\partial \xi_z} - 2 \frac{B_\phi^0 \delta B_\phi}{R_0} + \delta B_z \left| \frac{\partial B_R}{\partial z} \right|_0 \right) - \left| \frac{\partial P}{\partial R} \right|_0 \frac{\delta \rho}{\rho_0^2} - \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( B_\phi^0 \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial R} \right|_0 + B_z^0 \left| \frac{\partial B_z}{\partial R} \right|_0 \right) \frac{\delta \rho}{\rho_0} \\ + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( B_z^0 \left| \frac{\partial B_R}{\partial z} \right|_0 - \frac{(B_\phi^0)^2}{R_0} \right) \frac{\delta \rho}{\rho_0} &= 0 \\ \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial t} + \left( R_0 \left| \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right|_0 + 2\Omega_0 \right) \delta u_R + R_0 \left| \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right|_0 \delta u_z - \frac{1}{4\pi\rho_0} (B_R^0 \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial \xi_R} + B_z^0 \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial \xi_z} + \frac{B_R^0 \delta B_\phi}{R_0} \\ + \delta B_R \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial R} \right|_0 + \delta B_z \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right|_0 + \frac{\delta B_R B_\phi^0}{R_0}) + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( B_R^0 \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial R} \right|_0 + B_z^0 \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right|_0 + \frac{B_R^0 B_\phi^0}{R_0} \right) \frac{\delta \rho}{\rho_0} &= 0 \\ \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial \xi_z} + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( \left| \frac{\partial B_R}{\partial z} \right|_0 \delta B_R + B_R^0 \frac{\partial \delta B_R}{\partial \xi_z} + \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right|_0 \delta B_\phi + B_\phi^0 \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial \xi_z} \right) \\ - \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( B_R^0 \frac{\partial \delta B_z}{\partial \xi_R} + \delta B_R \left| \frac{\partial B_z}{\partial R} \right|_0 \right) - \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|_0 \frac{\delta \rho}{\rho_0^2} - \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( B_R^0 \left| \frac{\partial B_R}{\partial z} \right|_0 + B_\phi^0 \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right|_0 \right) \frac{\delta \rho}{\rho_0} \\ + \frac{1}{4\pi\rho_0} B_R^0 \left| \frac{\partial B_z}{\partial R} \right|_0 \frac{\delta \rho}{\rho_0} \\ \frac{\partial \delta B_R}{\partial t} + \delta u_R \left| \frac{\partial B_R}{\partial R} \right|_0 + \delta u_z \left| \frac{\partial B_R}{\partial z} \right|_0 - B_R^0 \frac{\partial \delta u_R}{\partial \xi_R} - B_z^0 \frac{\partial \delta u_R}{\partial \xi_z} &= 0 \\ \frac{\partial \delta B_\phi}{\partial t} + \left( \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial R} \right|_0 + \frac{B_\phi^0}{R_0} \right) \delta u_R + \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right|_0 \delta u_z - B_R^0 \left( \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial \xi_R} + \frac{\delta u_\phi}{R_0} \right) - B_z^0 \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial \xi_z} \\ - \left( R_0 \left| \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right|_0 + 2\Omega_0 \right) \delta B_R - R_0 \left| \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right|_0 \delta B_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta B_z}{\partial t} + \left| \frac{\partial B_z}{\partial R} \right|_0 \delta u_R + \left| \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_0 \delta u_z - B_R^0 \frac{\partial \delta u_z}{\partial \xi_R} - B_z^0 \frac{\partial \delta u_z}{\partial \xi_z} &= 0 \\ -\frac{5}{3} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \delta u_R \left| \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} \right|_0 + \delta u_z \left| \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} \right|_0 &= 0 \end{aligned}$$

dove  $\Omega_0$ ,  $\rho_0$ ,  $B_\phi^0$  e  $B_z^0$  sono rispettivamente la velocità angolare, la densità all'equilibrio, le componenti del campo magnetico al punto  $\mathbf{r}_0$  e il pedice '0' nelle derivate indicano che sono valutati a  $\mathbf{r}_0$ . Queste equazioni sono equazioni differenziali parziali lineari nelle variabili locali per le quantità perturbate e con *coefficienti costanti*. Questa è una buona approssimazione purchè le deviazioni  $(\xi_R, \xi_z)$  siano piccole comparate alle *scale di lunghezza caratteristiche* nelle direzioni radiali e verticali  $(L_R, L_z)$  cioè alle scale di lunghezza sulla quale ci sono significative variazioni nelle quantità all'equilibrio. Quindi la condizione di validità dell'analisi locale è:

$$\xi_R \ll L_R \quad \xi_z \ll L_z \quad (5.3)$$

E' solo ora che è utile espandere le quantità perturbate nelle equazioni in componenti di Fourier. Per ciascuna quantità perturbate  $f$  possiamo scrivere:

$$f(\xi_R, \xi_z, t) = f_k(k_R, k_z, \omega) e^{i(k_R \xi_R + k_z \xi_z - \omega t)} \quad (5.4)$$

dove  $k_R$  e  $k_z$  sono rispettivamente i numeri d'onda radiale e verticale (sono interi) e  $\omega$  è la frequenza d'onda. Sostituendo i modi normali nelle equazioni linearizzate, otteniamo il seguente sistema di equazioni per le trasformate (per semplicità di notazione indichiamo con  $f$  invece che con  $f_k$  la trasformata di Fourier della generica grandezza  $f$  e omettiamo la dipendenza  $(k_R, k_z, \omega)$  nelle ampiezze di Fourier)

$$\begin{aligned} \left( ik_R + \frac{1}{R_0} \right) \delta u_R + ik_z \delta u_z &= 0 \\ -i\omega \delta u_R - 2\Omega_0 \delta u_\phi + \frac{ik_R}{\rho_0} \delta P - \left| \frac{\partial P}{\partial R} \right|_0 \frac{\delta \rho}{\rho_0^2} - ik_z v_{Az}^0 \delta v_{AR} + \left( ik_R + \frac{2}{R_0} + \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial R} \right|_0 \right) v_{A\phi}^0 \delta v_{A\phi} \\ + \left( ik_R + \left| \frac{\partial \ln B_z}{\partial R} \right|_0 - \frac{B_R^0}{B_z^0} \left| \frac{\partial \ln B_R}{\partial z} \right|_0 \right) v_{Az}^0 \delta v_{Az} - \left[ \left( \frac{1}{R_0} + \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial R} \right|_0 \right) (v_{A\phi}^0)^2 \right. \\ \left. + \left( \left| \frac{\partial \ln B_z}{\partial R} \right|_0 - \frac{B_R^0}{B_z^0} \left| \frac{\partial \ln B_R}{\partial z} \right|_0 \right) (v_{Az}^0)^2 \right] \frac{\delta \rho}{\rho_0} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega\delta u_\phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega_0}\delta u_R + R_0 \left| \frac{\partial\Omega}{\partial z} \right|_0 \delta u_z - \left( \frac{1}{R_0} + \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial R} \right|_0 \right) v_{A\phi}^0 \delta v_{AR} - \left( ik_z + \frac{B_R^0}{B_z^0} ik_R + \frac{B_R^0}{B_z^0} \frac{1}{R_0} \right) v_{Az}^0 \delta v_{A\phi} \\
& - \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial z} \right|_0 v_{A\phi}^0 \delta v_{Az} + (v_{A\phi}^0)^2 \left( \frac{B_R^0}{B_\phi^0} \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial R} \right|_0 + \frac{B_z^0}{B_\phi^0} \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial z} \right|_0 + \frac{B_R^0}{B_\phi^0} \frac{1}{R_0} \right) \frac{\delta\rho}{\rho_0} = 0 \\
& -i\omega\delta u_z + \frac{ik_z}{\rho_0} \delta P - \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|_0 \frac{\delta\rho}{\rho_0^2} + \left( \left| \frac{\partial \ln B_R}{\partial z} \right|_0 v_{AR}^0 + ik_z v_{AR}^0 - \left| \frac{\partial \ln B_z}{\partial R} \right|_0 v_{Az}^0 \right) \delta v_{AR} \\
& \quad + \left( ik_z + \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial z} \right|_0 \right) v_{A\phi}^0 \delta v_{A\phi} - ik_R v_{AR}^0 \delta v_{Az} \\
& - \left( \left| \frac{\partial \ln B_R}{\partial z} \right|_0 (v_{AR}^0)^2 + \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial z} \right|_0 (v_{A\phi}^0)^2 - \left| \frac{\partial \ln B_z}{\partial R} \right|_0 v_{AR}^0 v_{Az}^0 \right) \frac{\delta\rho}{\rho_0} = 0 \\
& -i\omega\delta v_{AR} + \left| \frac{\partial \ln B_R}{\partial R} \right|_0 v_{AR}^0 \delta u_R + \left| \frac{\partial \ln B_R}{\partial z} \right|_0 v_{AR}^0 \delta u_z - ik_R v_{AR}^0 \delta u_R - ik_z v_{Az}^0 \delta u_R = 0 \\
& -i\omega\delta v_{A\phi} + \left( \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial R} \right|_0 + \frac{1}{R_0} \right) v_{A\phi}^0 \delta u_R + \left| \frac{\partial \ln B_\phi}{\partial z} \right|_0 v_{A\phi}^0 \delta u_z - \left( ik_R + \frac{1}{R_0} \right) v_{AR}^0 \delta u_\phi \\
& \quad - ik_z v_{Az}^0 \delta u_\phi - \left( R_0 \left| \frac{\partial\Omega}{\partial R} \right|_0 + 2\Omega_0 \right) \delta v_{AR} - R_0 \left| \frac{\partial\Omega}{\partial z} \right|_0 \delta v_{Az} = 0 \\
& -i\omega\delta v_{Az} + \left| \frac{\partial \ln B_z}{\partial R} \right|_0 v_{Az}^0 \delta u_R + \left( \left| \frac{\partial \ln B_z}{\partial z} \right|_0 - ik_z \right) v_{Az}^0 \delta u_z - ik_R v_{AR}^0 \delta u_z = 0 \\
& \quad i\omega \frac{5}{3} \frac{\delta\rho}{\rho} + \delta u_z \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} + \delta u_R \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} = 0
\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto le quantità  $v_{A\phi}^0 = B_\phi^0/\sqrt{4\pi\rho_0}$  e  $v_{Az}^0 = B_z^0/\sqrt{4\pi\rho_0}$  rispettivamente per le velocità di Alfvén associate alle componenti toroidali e verticali del campo magnetico locale, abbiamo definito un nuovo set di variabili ( $\delta v_{AR}, \delta v_{A\phi}, \delta v_{Az}$ ) in termini di ( $\delta B_R, \delta B_\phi, \delta B_z$ ) in modo tale che  $\delta \mathbf{v}_A = \delta \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho_0}$  e abbiamo introdotto la *frequenza di epicyclo*  $\kappa$  ( $\kappa^2 = \frac{2\Omega_0}{R} \frac{d(R^2\Omega_0)}{dR}$ ) che è una quantità che appare nell'analisi di stabilità di configurazioni che ruotano differenzialmente e rappresenta la frequenza alla quale tutte le variabili di flusso oscillano intorno ai loro valori di background in assenza di campo magnetico (per un profilo rotazionale dato da una legge di potenza, la frequenza di epicyclo è proporzionale alla frequenza angolare a tutti i raggi).

Per consistenza, la validità dell'analisi è ora ristretta ai modi con numeri d'onda tali che:

$$k_R L_R \gg 1 \quad k_z L_z \gg 1 \quad (5.5)$$

Consideriamo inoltre le seguenti assunzioni:

- scegliamo il punto caratteristico  $\mathbf{r}_0$  che si trova nel piano mezzo del disco  $(R_0, \phi_0, 0)$
- Eliminiamo tutti i termini di curvatura
- assumiamo che, localmente, i gradienti radiali del campo magnetico di equilibrio sono trascurabili

$$\left| \frac{\partial B_R}{\partial R} \right|_0 \ll 1 \quad \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial R} \right|_0 \ll 1 \quad \left| \frac{\partial B_z}{\partial R} \right|_0 \ll 1$$

- assumiamo anche che i gradienti verticali del campo magnetico di equilibrio sono localmente trascurabili

$$\left| \frac{\partial B_R}{\partial z} \right|_0 \ll 1 \quad \left| \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right|_0 \ll 1$$

Notiamo che il carattere solenoidale del campo magnetico assicura che, per  $\mathbf{B} = B_R(R, z)\mathbf{e}_R + B_\phi(R, z)\mathbf{e}_\phi + B_z(R, z)\mathbf{e}_z$ , la condizione  $\partial B_z / \partial z = 0$  tiene per qualunque  $z$ .

Sotto queste assunzioni e eliminando per semplicità di notazione il pedice '0', il sistema di equazioni diventa:

$$k_R \delta u_R + k_z \delta u_z = 0$$

$$-i\omega \delta u_R - 2\Omega \delta u_\phi + \frac{ik_R}{\rho} \delta P - \frac{\delta \rho}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial R} - ik_z v_{Az} \delta v_{AR} + ik_R (v_{A\phi} \delta v_{A\phi} + v_{Az} \delta v_{Az}) = 0$$

$$-i\omega \delta u_\phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \delta u_R + R \frac{\partial \Omega}{\partial z} \delta u_z - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A \delta v_{A\phi} = 0$$

$$-i\omega \delta u_z + \frac{ik_z \delta P}{\rho} - \frac{\delta \rho}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial z} + ik_z (v_{A\phi} \delta v_{A\phi} + v_{AR} \delta v_{AR}) - ik_R v_{AR} \delta v_{Az} = 0$$

$$-i\omega \delta v_{AR} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A \delta u_R = 0$$

$$-i\omega \delta v_{A\phi} - \frac{\partial \Omega}{\partial \ln R} \delta v_{AR} - R \frac{\partial \Omega}{\partial z} \delta v_{Az} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A \delta u_\phi = 0$$

$$-i\omega \delta v_{Az} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A \delta u_z = 0$$

$$i\omega \frac{5}{3} \frac{\delta \rho}{\rho} + \delta u_R \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} + \delta u_z \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} = 0$$

scriviamo in termini di matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_R & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ik_R}{\rho} & -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial R} & -i\omega & -2\Omega & 0 & -ik_z v_{Az} & ik_R v_{A\phi} & ik_R v_{Az} \\ 0 & 0 & \frac{\kappa^2}{2\Omega} & -i\omega & R \frac{\partial \Omega}{\partial z} & 0 & -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A & 0 \\ \frac{ik_z}{\rho} & -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial z} & 0 & 0 & -i\omega & ik_z v_{AR} & ik_z v_{A\phi} & -ik_R v_{AR} \\ 0 & 0 & -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A & 0 & 0 & -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A & 0 & -\frac{\partial \Omega}{\partial \ln R} & -i\omega & -R \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A & 0 & 0 & -i\omega \\ 0 & \frac{5}{3} \frac{i\omega}{\rho} & \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} & 0 & \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P \\ \delta \rho \\ \delta u_R \\ \delta u_\phi \\ \delta u_z \\ \delta v_{AR} \\ \delta v_{A\phi} \\ \delta v_{Az} \end{pmatrix} = 0$$

Per le soluzioni non triviali di questo sistema,  $\omega$  deve soddisfare la *relazione di dispersione magnetorotazionale*:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_R & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ik_R}{\rho} & -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial R} & -i\omega & -2\Omega & 0 & -ik_z v_{Az} & ik_R v_{A\phi} & ik_R v_{Az} \\ 0 & 0 & \frac{\kappa^2}{2\Omega} & -i\omega & R \frac{\partial \Omega}{\partial z} & 0 & -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A & 0 \\ \frac{ik_z}{\rho} & -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial z} & 0 & 0 & -i\omega & ik_z v_{AR} & ik_z v_{A\phi} & -ik_R v_{AR} \\ 0 & 0 & -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A & 0 & 0 & -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A & 0 & -\frac{\partial \Omega}{\partial \ln R} & -i\omega & -R \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A & 0 & 0 & -i\omega \\ 0 & \frac{5}{3} \frac{i\omega}{\rho} & \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} & 0 & \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

che si semplifica (Balbus, S.A., Hawley, J.F. 1998) a:

$$\frac{k^2}{k_z^2} \tilde{\omega}^4 + \left[ \frac{3}{5\rho} \left( \frac{k_R}{k_z} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial R} \right) \left( \frac{k_R}{k_z} \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} - \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^3} \left( \frac{k_R}{k_z} \frac{\partial (R^4 \Omega^2)}{\partial z} - \frac{\partial (R^4 \Omega^2)}{\partial R} \right) \right] \tilde{\omega}^2 - 4\Omega^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 = 0$$

dove

$$k^2 = k_z^2 + k_R^2 \quad \tilde{\omega}^2 = \omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2$$

Introducendo l'operatore  $\mathcal{D} = \left( \frac{k_R}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial R} \right)$  l'espressione diventa più compatta

$$\frac{k^2}{k_z^2} \tilde{\omega}^4 + \left[ \frac{3}{5\rho} (\mathcal{D}P) \mathcal{D} \ln P \rho^{-5/3} + \frac{1}{R^3} \mathcal{D}(R^4 \Omega^2) \right] \tilde{\omega}^2 - 4\Omega^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 = 0 \quad (5.6)$$

Il primo termine all'interno delle parentesi rappresenta la risposta di galleggiamento della perturbazione e il secondo termine rappresenta la sua risposta rotazionale. La risposta di Alfvén non è semplicemente 'aggiunto in quadrature' ma appare in ogni parte della relazione di dispersione e i suoi effetti sono di conseguenza più sottili. Si noti che quando  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A = 0$ , l'equazione (5.6) si riduce al problema idrodinamico considerato da (Goldreich e Schubert 1967) nel limite adiabatico della loro equazione.

### 5.3 Criterio di stabilità generale assisimmetrico

Si può facilmente mostrare che la relazione di dispersione (5.6) implica che  $\tilde{\omega}^2$  (e quindi  $\omega^2$ ) deve essere reale. Possiamo quindi studiare la stabilità dei modi locali investigando la regione vicino a  $\omega^2 = 0$ , o  $\tilde{\omega}^2 = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2$ . In questo limite l'equazione (5.6) può essere scritto:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 = \frac{k_z^2}{k^2} \left[ 4\Omega^2 + \frac{3}{5\rho} (\mathcal{D}P) \mathcal{D} \ln P \rho^{-5/3} + \frac{1}{R^3} \mathcal{D}(R^4 \Omega^2) \right] \quad (5.7)$$

Un requisito per la stabilità è che l'equazione (5.7) non abbia una soluzione reale per  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A$ . Questo implica:

$$4\Omega^2 + \frac{3}{5\rho} (\mathcal{D}P) \mathcal{D} \ln P \rho^{-5/3} + \frac{1}{R^3} \mathcal{D}(R^4 \Omega^2) < 0 \quad (5.8)$$

Si noti che la nostra condizione di stabilità per un disco magnetizzato non fa nessun riferimento al campo magnetico e in particolare una condizione di stabilità per un sistema idrodinamico non può essere ritrovato dall'equazione (5.8) prendendo una qualunque sorta di limite.

Ritornando alla nostra analisi, introduciamo la variabile  $x = k_R/k_z$ , ricollochiamo l'operatore  $\mathcal{D}$  con la sua definizione ( $\mathcal{D} = \left( \frac{k_R}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial R} \right)$ ), semplifichiamo e raggruppiamo, otteniamo:

$$N_z x^2 + \left[ \frac{3}{5\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} \right) - R \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} \right] x + N_R^2 + \frac{\partial \Omega^2}{\partial \ln R} > 0 \quad (5.9)$$

dove

$$N_R^2 = -\frac{3}{5\rho} \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} \quad N_z^2 = -\frac{3}{5\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z}$$

sono i termini della frequenza di oscillazione di Brunt-Väisälä:

$$N^2 = -\frac{3}{5\rho} (\nabla P) \cdot (\nabla \ln P \rho^{-5/3}) = N_z^2 + N_R^2 \quad (5.10)$$

L'equazione (5.9) coinvolge una semplice espressione quadratica in  $x$  e le seguenti due condizioni assicureranno che la sua parte sinistra sia positiva:

- La prima condizione è che la quadratica sia positiva per qualunque valore di  $x$ . Questo è assicurato se

$$N^2 + \frac{\partial \Omega^2}{\partial \ln R} > 0 \quad (5.11)$$

dato che questa condizione significa che o molto piccolo o molto grande  $x^2$  renderà positiva l'equazione quadratica

- La seconda condizione è che non ci siano radici reali dell'equazione quadratica, il quale è semplicemente una questione di limitare il suo discriminante a valori negativi. L'algebra che segue è un po' semplificato notando l'equazione di vorticità per lo stato di equilibrio:

$$R \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (5.12)$$

Abbiamo usato l'assunzione che il campo magnetico non altera le proprietà di rotazione dell'equilibrio imperturbato.

La richiesta che il discriminante dell'equazione (5.9) sia negativa porta, dopo aver usato l'equazione (5.12) e alcune semplificazioni algebriche, a:

$$\left( -\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \Omega^2}{\partial R} \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial z} - \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} \frac{\partial \ln P \rho^{-5/3}}{\partial R} \right) > 0 \quad (5.13)$$

Le equazioni (5.11) e (5.13) sono estremamente generali e possono essere applicate a stelle come a dischi. Queste sono confrontabili con il classico *criterio di Høiland* che si ottiene per la stabilità idrodinamica. Con  $l^2 = R^4 \Omega^2$  queste sono:

$$N^2 + \frac{1}{R^3} \frac{\partial l^2}{\partial R} > 0 \quad (5.14)$$

$$\left( -\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial l^2}{\partial R} \frac{\partial P \rho^{-5/3}}{\partial z} - \frac{\partial l^2}{\partial z} \frac{\partial P \rho^{-5/3}}{\partial R} \right) > 0 \quad (5.15)$$

Le equazioni (5.14) e (5.15) sono molto simili alle loro corrispettive magnetiche (5.11) e (5.13) la sola differenza è che i gradienti di momento angolare sono sostituiti dai gradienti di velocità angolare. Questo è il segno caratteristico dei campi magnetici in sistemi che ruotano

L'analisi di stabilità lineare magnetoidrodinamico ci ha portato quindi ad un criterio più che sufficiente a garantire un'instabilità locale e lineare per modelli di dischi Kepleriani politropici ( $s = \text{cost}$ ,  $\Omega \sim R^{-3/2}$ ).

## Capitolo 6

# ESPERIENZA NUMERICA SULLA STRUTTURA E STABILITÀ DEI DISCHI DI ACCRESIMENTO

Un importante strumento per investigare l'evoluzione di sistemi fisici descritti dalle equazioni di Eulero o MHD è costituito dalla *simulazione numerica*. Nell'indagine numerica, un sistema di equazioni alle derivate parziali, quindi infinito dimensionale, viene ricondotto ad un sistema algebrico finito-dimensionale, attraverso la rappresentazione delle variabili e delle loro derivate su un sistema finito di punti (la griglia numerica). In questo modo è possibile studiare le equazioni del moto multidimensionali e non lineari nella loro complessità. Tale rappresentazione resta evidentemente limitata a scale spazio-temporali maggiori della scala minima data dalla griglia numerica, che definisce quindi la risoluzione effettiva della simulazione numerica.

Un secondo aspetto importante riguarda il fatto che le equazioni di Eulero ed MHD comprimibili producono soluzioni discontinue (shocks), anche con condizioni iniziali regolari. Questo fenomeno richiede l'adozione di schemi numerici particolari, genericamente classificati come *shock-capturing* o *upwind*. Nella simulazione in astrofisica questi schemi sono ormai largamente usati, utilizzando prevalentemente la ricerca numerica sviluppata nella fluido-dinamica.

In questo capitolo ci siamo limitati a considerare un modello di disco in rotazione descritto dalle equazioni di Eulero, utilizzando lo schema numerico introdotto dal codice ECHO (Eulerian Conservative High Order) (Londrillo P. & DelZanna L. JCP,2004)

Nel seguito viene quindi presentata una sintesi delle procedure numeriche utilizzate e vengono quindi illustrati i risultati numerici preliminari, riguardanti lo studio della stabilità non-lineare, in due e tre dimensioni, per la configurazione di equilibrio di un disco di accrescimento discussa nel Cap.3 (par. 2.1).

## 6.1 Caratteristiche delle equazioni di Eulero

Deriviamo qui, limitandoci al caso di una sola dimensione spaziale, l'*autosistema completo* (autovalori e autovettori destri e sinistro) delle equazioni di Eulero che è alla base degli algoritmi TVD (Total variation diminishing) della fluidodinamica computazionale (CFD). Il sistema di equazioni di Eulero 1D ha la semplice forma:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (6.1)$$

dove

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \mathcal{E} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ (\mathcal{E} + P)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + P \\ \frac{u_3 + P}{u_1} u_2 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente il vettore delle *variabili conservative* ( $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) e il corrispondente vettore del *flusso* ( $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ). Abbiamo come al solito, indicato con  $\rho$ ,  $u$ ,  $P$ ,  $\mathcal{E}$  rispettivamente la densità di massa, la velocità, la pressione del gas e la densità di energia (nel caso di un gas politropico  $\mathcal{E} = 1/2\rho u^2 + P/(\gamma - 1)$ ). Abbiamo inoltre usato  $\partial_d \mathbf{x}$  per denotare la derivata parziale del primo ordine di un vettore  $\mathbf{x}$  rispetto a  $d$ .

Scritta nella *forma quasi lineare* diventa

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0 \quad (6.2)$$

dove  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{f}$  è la *matrice Jacobiana* che calcolata nel caso di un fluido politropico diventa

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma + 1)u^2 & (3 - \gamma)u & (\gamma - 1) \\ \frac{-(\mathcal{E} + P)}{\rho} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 & \frac{(\mathcal{E} + P)}{\rho} - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

La teoria ci dice che un sistema è iperbolico se la matrice Jacobiana è *diagonalizzabile* con *autovalori reali* così che esiste una matrice non singolare  $R$  tale che

$$\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{\Lambda} \quad (6.4)$$

dove  $\mathbf{A}$  è una matrice diagonale i cui elementi  $\{\lambda_i(\mathbf{u})\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono gli *autovalori* di  $\mathbf{A}$  e vengono chiamati le *velocità caratteristiche* del sistema e  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{R}^{-1}$  sono rispettivamente le corrispondenti matrici dei 3 *autovettori destri*  $\{\mathbf{R}_i(\mathbf{u})\}$  di  $\mathbf{A}$  e dei 3 *autovettori sinistri*  $\{\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{u})\}$  di  $\mathbf{A}$ .

Nel caso delle equazioni di Eulero, si può facilmente verificare che siamo in questa situazione. Gli autovalori della (6.3) si ottengono risolvendo il polinomio caratteristico:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma + 1)u^2 & (3 - \gamma)u - \lambda & (\gamma - 1) \\ -\frac{(\varepsilon + P)}{\rho}u + \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 & \frac{(\varepsilon + P)}{\rho} - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità e  $\lambda$  è un parametro. Si ottiene:

$$\lambda_1(\mathbf{u}) = u - v_s \quad \lambda_2(\mathbf{u}) = u \quad \lambda_3(\mathbf{u}) = u + v_s \quad (6.5)$$

dove  $v_s$  è la velocità del suono ( $v_s = \sqrt{\gamma P / \rho}$ ).

I corrispondenti autovettori destri  $\mathbf{R}_i$  sono tali che  $\mathbf{A}\mathbf{R}_i = \lambda_i\mathbf{R}_i$  e si ottengono quindi risolvendo il sistema  $(\mathbf{A} - \lambda_i I)\mathbf{R}_i = \mathbf{0}$ . Gli autovettori sinistri possono essere determinati dall'inverso della matrice degli autovettori destri ( $\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1}$ )

## 6.2 Discretizzazione spaziale delle equazioni 1D

In questo paragrafo descriviamo gli algoritmi numerici usati per l'integrazione delle equazioni di Eulero, a partire dal modello base costituito da una legge di conservazione omogenea scalare (ad una componente) 1D. Si considera dunque l'equazione

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad a < x < b, \quad c(u) = \partial_u f(u) \quad (6.6)$$

con assegnate la condizione iniziale  $u(x, 0)$  e appropriate condizioni al contorno.

In generale, tre tipi di condizioni al bordo sono considerate:

- **Periodiche:**  $u(a, t) = u(b, t)$ , corrispondenti ad un sistema invariante per traslazione;
- **Riflettenti:**  $u(a, t) = u(b, t) = 0$ , corrispondenti alla presenza di una parete rigida (inimpermeabile) ai bordi;
- **Inflow-Outflow:** corrispondenti alla presenza di pareti trasparenti ai bordi. In questo caso, una equazione iperbolica richiede che sia specificato un valore al bordo, a seconda del segno della velocità caratteristica  $c(u)$ .

In particolare per  $x = a$ , solo se  $c(a) > 0$  (caratteristica entrante), deve essere assegnato un valore  $u(a, t)$ , e viceversa per il bordo destro  $x = b$

Nella discretizzazione spaziale, il dominio di integrazione viene campionato da una griglia di  $N$  punti  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) equispaziati con passo di cella  $\Delta x$  e corrispondentemente la variabile  $u(x, t)$  viene rappresentata dagli  $N$  valori  $u_i(t) = u(x_i, t)$ . Lasciando la variabile  $t$  continua, si ottiene un sistema di  $N$  equazioni differenziali ordinarie nel tempo (formulazione semi-discreta):

$$\left. \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{df(u)}{dx} \right|_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

ed il problema essenziale si riduce all'approssimazione discreta della derivata spaziale dei flussi. Per mantenere il carattere conservativo della equazione originaria, la derivata si esprime come differenza finita (DF) centrata

$$\frac{du_i(t)}{dt} + \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

dove  $f_{i+\frac{1}{2}} = f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t))$  è il flusso numerico al punto intercella  $x_{i+\frac{1}{2}}$  e tempo  $t$ .

Da un punto di vista formale, il calcolo della derivata si riduce dunque alla interpolazione numerica nei punti intercella della variabile flusso  $f(u_i)$ , o della variabile  $u_i(t)$ , assegnate per ogni tempo  $t$  nei punti di griglia  $x_i$ . Per equazioni che contengono discontinuità, tuttavia, una semplice interpolazione non è appropriata, poichè produce schemi oscillatori e quindi instabili. Gli schemi shock-capturing o upwind sono stati disegnati per avere una interpolazione (o ricostruzione) dei valori dei flussi alle intercelle che siano: (a) monotoni o più genericamente non-oscillatori; (b) che permettono di ricostruire una discontinuità in modo corretto e con alta risoluzione (uno-due punti per discontinuità); La procedura di ricostruzione si basa sui seguenti passi computazionali:

1. dati i valori  $u_i$ , per ogni intercella  $x_{i+1/2}$  si ricostruiscono per interpolazione due valori  $[u_{i+1/2}^L, u_{i+1/2}^R]$ , utilizzando, rispettivamente, punti a sinistra  $\dots, u_{i-1}, u_i$ , (L) o a destra  $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots$  (R) della cella di riferimento. In questo modo vengono quindi ricostruiti anche due flussi  $[f^L, f^R]_{i+1/2}$ .
2. La ricostruzione definisce un ordine formale di accuratezza, a seconda del numero dei punti usati. In particolare, schemi del secondo ordine richiedono solo tre punti per la interpolazione  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ .

3. Lo schema interpolatorio viene disegnato in modo da mantenere la monotonicità dei dati  $u_i$ , e quindi in modo che, in presenza di discontinuità, la ricostruzione utilizzi sempre punti prima (o dopo) la posizione della stessa. La difficoltà di applicazione di questo principio, che sta alla base di tutta la ricerca numerica per le equazioni iperboliche, deriva dal fatto che la posizione di un salto che denoti discontinuità non è noto a priori, e va individuato empiricamente.
4. Infine, una volta noti i valori  $L - R$  del flusso all'intercella, viene definito un unico valore del flusso (flusso upwind)  $f_{i+1/2}^U$ , utilizzando lo schema di Roe:

$$f_{i+1/2}^U = \frac{1}{2} [f^R + f^L - |c(u)|(u^R - u^L)]_{i+1/2} \quad (6.7)$$

Per costruzione, lo schema di Roe produce un flusso upwind, cioè ricostruito a sinistra se  $c(u) > 0$  o a destra se  $c(u) < 0$ .

La discretizzazione spaziale viene quindi completata, costruendo la derivata spaziale per differenza di due valori del flusso precedentemente ricostruito. La derivata a due punti del flusso produce sempre una approssimazione del **secondo ordine**, indipendentemente dall'ordine di ricostruzione del flusso. Per avere approssimazioni di ordine elevato, è necessaria una seconda fase di ricostruzione che opera sui flussi stessi. Utilizzando infatti l'analisi di Taylor, è possibile dimostrare che combinando opportunamente valori dei flussi in celle vicine:

$$\hat{f}_{i+1/2} = c_0 f_{i+1/2} + c_1 (f_{i-1/2} + f_{i+3/2}) + \dots \quad (6.8)$$

si ottengono flussi numerici la cui differenza approssima la derivata prima con ordine (pari)  $> 2$ .

Nel caso di una equazione scalare in più dimensioni, la procedura sopra indicata si applica, separatamente, per ciascuna direzione coordinata. Le derivate dei flussi così calcolate si sommano, infine, prima di procedere all'integrazione temporale.

Nel caso di un sistema di equazioni, come per le equazioni di Eulero o MHD, gli algoritmi sopra indicati possono essere egualmente applicati, operando la ricostruzione su ciascuna variabile. Tuttavia, la presenza di velocità caratteristiche diverse, richiede un ulteriore sforzo computazionale, poichè la

definizione del flusso upwind di Roe è basato sulla presenza di una sola caratteristica.

Un metodo efficiente largamente utilizzato, come nel codice ECHO, è quello di approssimare il flusso upwind con lo schema di Lax-Friedrichs, che ha la forma dello schema di Roe, con velocità  $|c(u)|$  rimpiazzata con il valore  $\alpha = \max_k |\lambda_k|$  del modulo degli autovalori (5 nel caso delle equazioni di Eulero) del sistema. Il flusso di Lax-Friedrichs è quindi dato da

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{LF}(u_{i+\frac{1}{2}}^L, u_{i+\frac{1}{2}}^R) = \frac{1}{2} (f_{i+\frac{1}{2}}^L + f_{i+\frac{1}{2}}^R) - \frac{1}{2} \alpha (u_{i+\frac{1}{2}}^R - u_{i+\frac{1}{2}}^L) \quad (6.9)$$

applicato ad ogni componente scalare  $(f, u)$  del vettore flusso e del vettore delle variabili conservate del sistema.

### 6.2.1 La ricostruzione MUSCL

La ricostruzione MUSCL è il più semplice schema monotono del secondo ordine per interpolare i valori  $u_{i+\frac{1}{2}}$  all'intercella utilizzando tre punti dati  $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$  della variabile  $u(x, t)$  ad un fissato passo temporale  $t = t^n$ .

Una interpolazione lineare sinistra è data da

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = u_i + \frac{1}{2} \Delta[u]$$

e la corrispondente interpolazione destra (nel punto  $x_{i-\frac{1}{2}}$ ) è data da

$$u_{i-\frac{1}{2}}^R = u_i - \frac{1}{2} \Delta[u]$$

ove  $\Delta[u]$  denota una approssimazione della derivata prima moltiplicata per  $\Delta x$ . Per avere una stima non oscillatoria si usa l'algoritmo *minmod* (MM)

$$\Delta[u] = MM[(u_{i+1} - u_i), (u_i - u_{i-1})]$$

che ritorna un valore zero se le due differenze indicate sono di segno diverso (caso oscillatorio) o il valore della differenza più piccola in valore assoluto.

### 6.2.2 Avanzamento temporale

Per la discretizzazione temporale abbiamo utilizzato la classe dei metodi di Runge-Kutta. Questi metodi sono usati per risolvere un sistema di equazioni differenziali ordinarie ai valori iniziali scritte come:

$$\frac{du}{dt} = L(u) \quad (6.10)$$

dove  $L(u)$  è un'approssimazione della derivata  $(-\partial_x f(u))$  nell'equazione differenziale (6.6)

Il metodo Runge-Kutta del secondo ordine è dato da:

$$u^1 = u^n + \Delta t L(u^n) \quad (6.11)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}u^1 + \frac{1}{2}\Delta t L(u^1) \quad (6.12)$$

Il metodo Runge-Kutta del terzo ordine è dato da:

$$u^1 = u^n + \Delta t L(u^n) \quad (6.13)$$

$$u^2 = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^1 + \frac{1}{4}\Delta t L(u^1) \quad (6.14)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^2 + \frac{2}{3}\Delta t L(u^2) \quad (6.15)$$

### 6.2.3 Stabilità numerica della integrazione temporale

Il procedimento descritto funziona correttamente se è soddisfatto il requisito di stabilità; esso si basa sulla valutazione nelle varie celle del dominio di un parametro detto CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) che non deve superare il valore unitario, cioè

$$c = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (6.16)$$

Si noti che  $c$  è una quantità adimensionale ed è il rapporto della velocità caratteristica  $\lambda$  nelle PDE e la 'mesh speed'  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Quindi la velocità caratteristica  $\lambda$  del modello deve essere minore o uguale all'ampiezza spaziale  $\Delta x$  diviso il time step  $\Delta t$ .

A causa del criterio CFL, non si può arbitrariamente scegliere un'ampiezza spaziale della griglia senza anche tener conto del time step del modello. Se vuoi raffinare la risoluzione spaziale per vedere le piccole scale di tempo devi avere anche una raffinata risoluzione temporale.

## 6.3 Codice e risultati

Abbiamo usato una parte del codice numerico ECHO per lo studio della evoluzione temporale di un disco di accrescimento in coordinate cilindriche  $(R, z, \phi)$ , a partire dal modello di equilibrio bidimensionale descritto nel (Cap.3, Par.2.1)

Per questo studio, e per acquisire maggiore conoscenza del codice, abbiamo riscritto in C e verificato numericamente alcune parti del codice, in particolare le condizioni iniziali, le condizioni di inflow-outflow al bordo, e gli algoritmi di ricostruzione basati sullo schema MUSCL descritto precedentemente.

Nell'approssimazione numerica della condizione di equilibrio di un disco in rotazione, con velocità  $\Omega(R)$  e densità  $\rho(R, z)$  e pressione  $P(R, z)$  troncate su una curva nel piano  $(R, z)$ , come quella descritta nel Cap. 3, è necessario tenere conto di due aspetti cruciali:

1. il modello analitico prevede velocità e densità nulle nello spazio esterno al disco. Numericamente questo non è ammissibile, e la zona esterna deve essere riempita con una opportuna soluzione di equilibrio (una atmosfera esterna), di bassa densità. Abbiamo perciò scelto di aggiungere al disco una atmosfera isoterma, in equilibrio con il potenziale gravitazionale della massa centrale.
2. La soluzione di equilibrio numerica non è esatta, e quindi durante l'evoluzione del sistema si crea sempre una velocità (radiale e verticale), proporzionale all'errore numerico dello schema usato.

Nel valutare i risultati della simulazione, è perciò importante verificare preliminarmente: (a) che tale errore numerico è tanto più piccolo quanto più alto è l'ordine dello schema; (b) che l'errore non cresce nel tempo.

Se queste condizioni sono verificate, è possibile concludere che il sistema in equilibrio è effettivamente stabile, come mostrato nelle figure allegate.

Nel caso specifico esaminato, si è adottata una griglia  $(R, z)$  di  $(384 \times 384)$  punti, che discretizzano un dominio spaziale  $R = [1, 24]$  e  $z = [-12, +12]$ , in unità adimensionali in cui  $GM = 1$ , la densità massima del disco è  $\rho_{max} = 10$  ed il momento angolare (costante) è  $l_0 = 2.2$ .

La simulazione ha seguito l'evoluzione del sistema per un tempo (adimensionale)  $T = 10$ , corrispondente a circa un periodo di rotazione. Simulazioni fatte su tempi più lunghi confermano i risultati di stabilità del disco, anche se l'approssimazione adottata per le condizioni al contorno nel punto interno  $R = 1$  della griglia tende a produrre un flusso di accrezione anomalo, che tuttavia è riconducibile solo ad effetti numerici e non fisici.

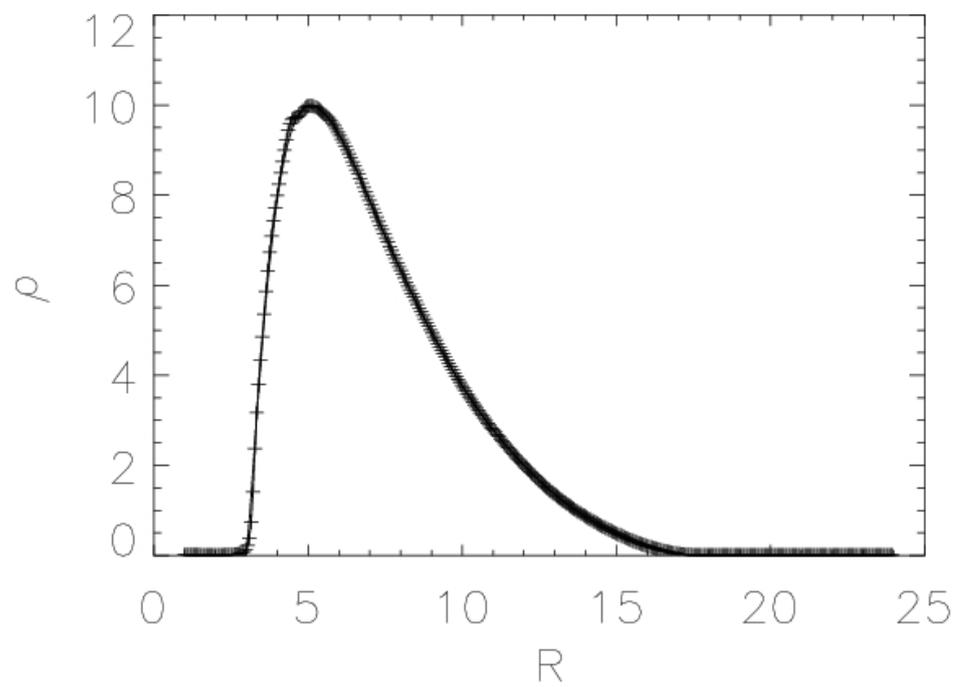
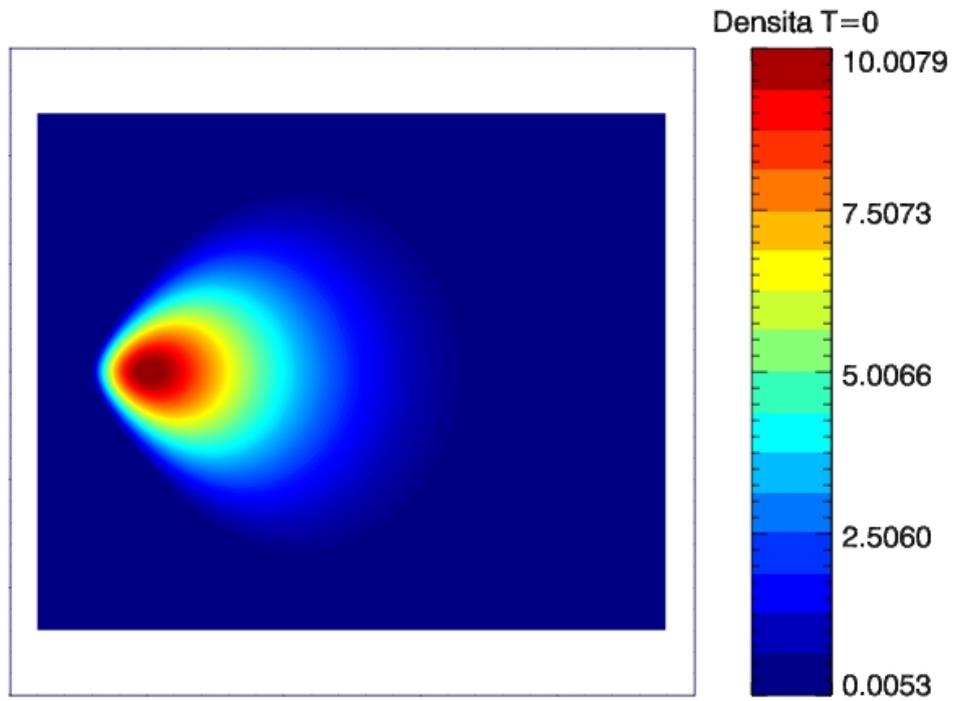
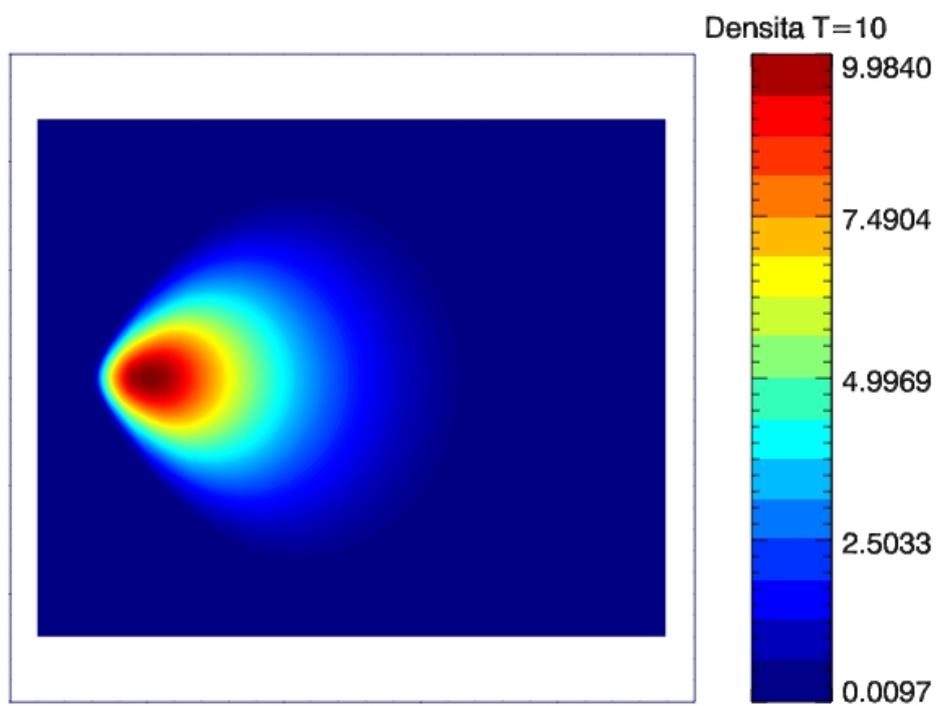


Figura 6.1: Confronto tra il profilo di densità lungo  $R$  e nel piano equatoriale  $z=0$  all'inizio della simulazione  $T=0$  e quello al tempo (adimensionale)  $T=10$  "che corrisponde a circa un periodo di rotazione"

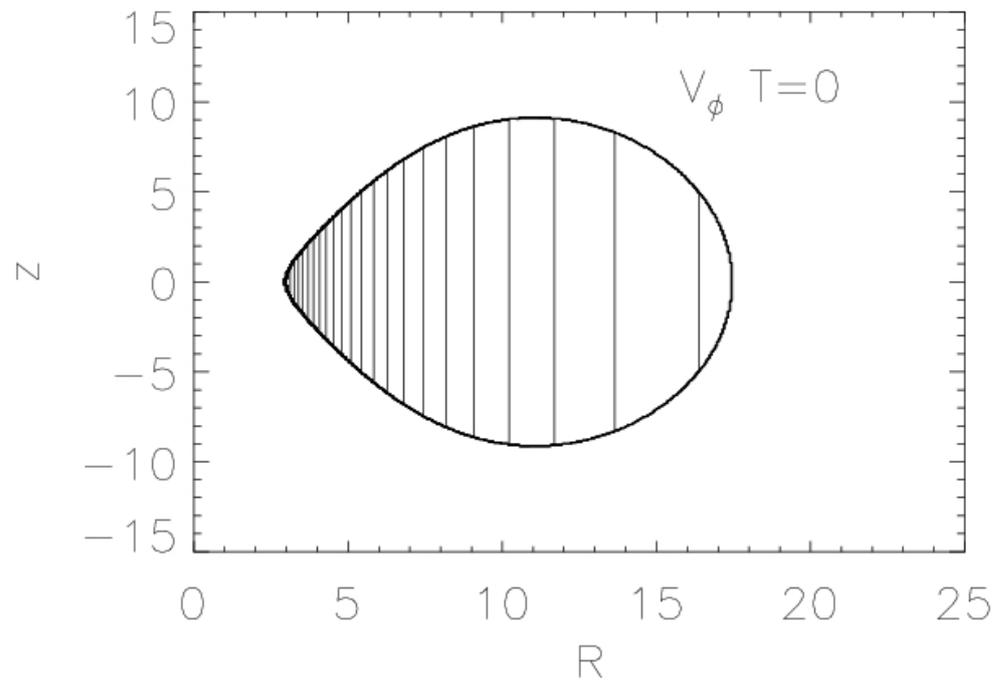


(a)

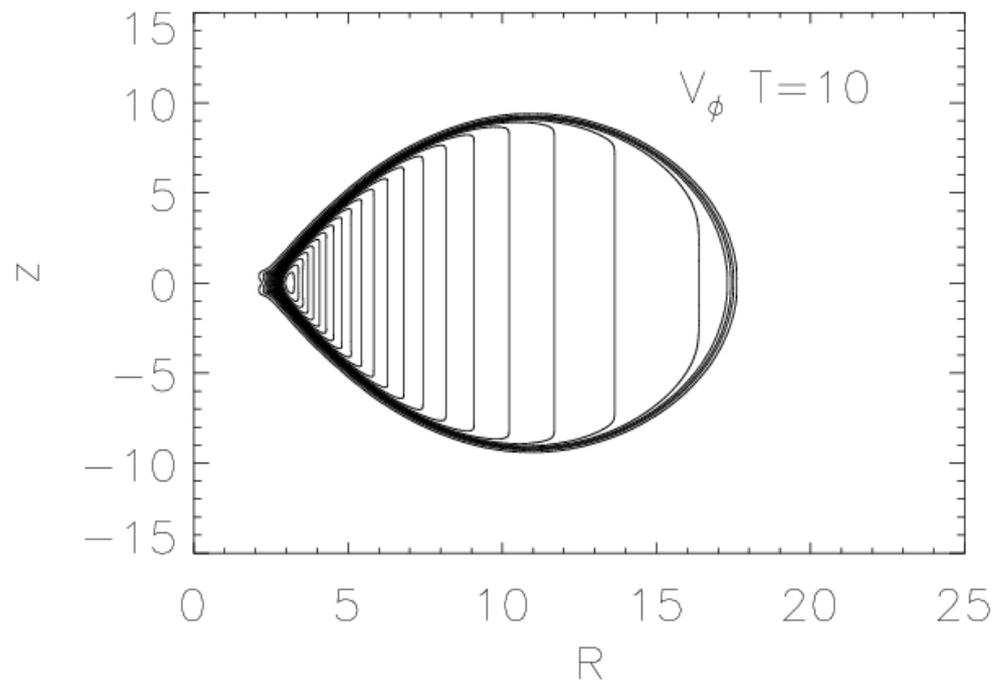


(b)

Figura 6.2: Distribuzione di densità nel piano R-z all'inizio della simulazione T=0 (Figura a) e al tempo (adimensionale) T=10 (Figura b)



(a)



(b)

Figura 6.3: Contour-plot della velocità di rotazione all'inizio della simulazione  $T=0$  (Figura a) e al tempo (adimensionale)  $T=10$  (Figura b)



# CONCLUSIONI

Abbiamo discusso in questo lavoro di tesi come l'instabilità magnetorotazionale ha permesso di aprire un nuovo campo di indagine per la comprensione dei processi di accrescimento e abbiamo avviato uno studio numerico per l'evoluzione non lineare di un modello di equilibrio perturbato, avvalendoci del codice (ECHO) già disponibile.

Anche se il modello di disco utilizzato è molto idealizzato (plasma ideale in rotazione differenziale intorno a un corpo massivo centrale Newtoniano non-autogravitante e otticamente sottile), estendere il codice al caso 3D e al caso magnetico è un lavoro molto utile perchè gli esperimenti numerici fatti in questa approssimazione, utilizzano un codice con grande dissipazione numerica che potrebbe nascondere importanti effetti fisici.

Inoltre il fatto che gli stress di Maxwell-Reynolds mediati sull'angolo  $\phi$ , dovuti alla turbolenza, possano essere modellizzati con un termine viscoso-resistivo (modello *alpha*), che sta alla base della teoria dell'accrescimento, è un aspetto ancora poco indagato. Questo essenzialmente perchè la comunità astrofisica si è concentrata sull'estensione ad un modello di disco più realistico introducendo ulteriori effetti fisici che possono essere importanti in alcune situazioni astrofisiche.

Nelle regioni interne di un disco di accrescimento intorno ad una stella di neutroni, ad esempio, la forza centrifuga e il gradiente di pressione termica devono essere superati dallo stress magnetico per permettere l'accrescimento ai poli per incanalamento lungo le linee del campo magnetico. Pertanto in queste regioni bisogna considerare  $\beta \lesssim 1$

In vicinanza di un buco nero poi, è necessaria una trattazione relativistica.

Nelle regioni più interne dei dischi dove la luminosità è vicina al limite di Eddington la pressione di radiazione è molto più grande della pressione del gas e fornisce il principale mezzo di supporto nella direzione verticale.

I dischi protostellari tendono ad essere estremamente densi e freddi ( $T \lesssim$

800K) e pertanto è probabile che hanno una frazione di ionizzazione ben al di sotto del valore richiesto per un buon accoppiamento magnetico. Questo suggerisce pertanto che vale la pena continuare a studiare la dinamica dei dischi considerando processi puramente idrodinamici.

## Appendice A

# Dal modello cinetico al modello a un fluido in regime MHD per un plasma collisionale

### A.1 Modello a due fluidi per un plasma collisionale

Vediamo qui come, per un plasma a due componenti (protoni ed elettroni) in cui l'unica forza dovuta a affetti collettivi è la forza elettromagnetica (trascurando la gravità), l'ipotesi di **equilibrio termodinamico locale** per ciascuna componente (separatamente), ci permette di passare da una descrizione cinetica a una descrizione a due fluidi del plasma risolvendo il problema della chiusura del sistema di equazioni fluide.

Si parte facendo un *processo di media sulle velocità*. Questo porta a definire la densità numerica delle particelle nello spazio ordinario come

$$n_k(\mathbf{x}, t) = \int f_k(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

E' chiaro che, nel processo di media si perdono le informazioni relative al comportamento delle particelle nello spazio delle velocità. E' importante tener presente che questa perdita non è essenziale nei casi in cui le velocità delle particelle individuali non si scostino dalla media in maniera significativa ma se un gruppo di particelle avesse un comportamento peculiare rispetto alle altre, questa peculiarità verrebbe attenuata o addirittura persa nel processo di media, col conseguente rischio di trascurare effetti fisici importanti.

Si definiscono poi i *momenti* della funzione di distribuzione.

$$M_k(n) = \int \psi(\mathbf{v}) f_k(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (\text{A.2})$$

dove  $\psi(\mathbf{v})$  è una funzione data dal prodotto multilineare delle componenti di  $\mathbf{v}$  ( $\psi(\mathbf{v}) = v_i v_j \dots v_l$ ). Il valore medio di  $\psi(\mathbf{v})$  ( $\langle \psi \rangle$ ) è legato al momento in questo modo:

$$\langle \psi \rangle = \frac{M_k(n)}{n_k(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{n_k(\mathbf{x}, t)} \int \psi(\mathbf{v}) f_k(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (\text{A.3})$$

Dalla definizione dei momenti si vede che

- Il momento di **ordine zero**, che si ottiene ponendo  $\psi = 1$  nella (A.2), è la densità numerica (A.1)
- Il momento di **ordine uno**, che si ottiene ponendo  $\psi = \mathbf{v}$  nella (A.2), è legato alla velocità media  $\langle \mathbf{v} \rangle$  che indichiamo con  $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$

$$\int \mathbf{v} f_k(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = n_k(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$$

( $\mathbf{u}^{(k)}$  è la velocità delle particelle che si trovano 'nel punto  $\mathbf{x}$ ' ed è divisa dalla velocità di una singola particella che abbiamo indicato con  $\mathbf{v}$ )

I momenti obbediscono a loro volta ad un'equazione evolutiva, detta *equazione generale dei momenti*, che si ottiene moltiplicando l'equazione cinetica (2.11) per  $\psi(\mathbf{v}) = v_i v_j \dots v_l$  e integrando sullo spazio delle velocità

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_k \langle \psi \rangle) + \nabla \cdot (n_k \langle \mathbf{v} \psi \rangle) - \frac{n_k e}{m_k} \mathbf{E} \cdot \langle \nabla_{\mathbf{v}} \psi \rangle - \frac{n_k e}{m_k c} \langle (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \psi \rangle = \int \psi(\mathbf{v}) \left( \frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v} \quad (\text{A.4})$$

Si avrà evidentemente una equazione per ciascun momento.

- L'equazione per il momento di **ordine zero**, che si ottiene ponendo  $\psi = 1$  nella (A.4), corrisponde all'*equazione di continuità*

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}^{(k)}) = G_k \quad (\text{A.5})$$

dove  $G_k$  è il termine collisionale  $G^{(k)} = \int \left( \frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v}$

- L'equazione per il momento del **primo ordine**, che si ottiene ponendo  $\psi = m_k \mathbf{v}$  nella (A.4), corrisponde all'*equazione del moto*:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_k m_k \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla \cdot (n_k m_k \mathbf{u}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{P}^{(k)}) - e_k n_k \mathbf{E} - \frac{e_k n_k}{c} (\mathbf{u}^{(k)} \times \mathbf{B}) = \mathbf{R}^{(k)} \quad (\text{A.6})$$

dove  $\mathbf{R}^{(k)} = \int m_k \mathbf{v} \left( \frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v}$  è il termine collisionale e il secondo termine è stato ottenuto sviluppando il valore medio  $n_k m_k \langle v_i v_j \rangle$  utilizzando

la decomposizione della velocità  $\mathbf{v}$  della singola particella ( $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ ) dove  $\mathbf{u}$  è la velocità media e  $\mathbf{w}$  è la velocità peculiare detta anche *dispersione di velocità* e rappresenta la velocità della particella dovuta al moto di agitazione termica. Si ottiene:

$$n_k m_k \langle v_i v_j \rangle = n_k m_k u_i u_j + n_k m_k \langle w_i w_j \rangle \quad (\text{A.7})$$

Il secondo termine è detto *tensore di pressione*  $\mathbf{P}_{ij}^{(k)}$  e si riferisce al moto termico.  $\mathbf{P}_{ij}^{(k)}$  è evidentemente un tensore simmetrico e può essere utile distinguere la parte diagonale da quella non diagonale scrivendo:

$$\mathbf{P}_{ij}^{(k)} = P_{ij}^{(k)} + \Pi_{ij}^{(k)} \quad (\text{A.8})$$

dove  $P_{ij}^{(k)}$  è la parte diagonale del tensore che corrisponde alla normale definizione di pressione di un fluido (nel caso di un mezzo isotropo i termini sono tutti uguali  $P_{ij}^{(k)} = P^{(k)} \delta_{ij}$ ) e  $\Pi_{ij}$  è la parte non diagonale del tensore e questi sono legati agli *sforzi di taglio* (sono diversi da zero solo in presenza di forze viscosse).

- L'equazione per il momento del **secondo ordine**, che si ottiene ponendo  $\psi = \frac{1}{2} m_k v^2$  nella (A.4), corrisponde all'*equazione di conservazione dell'energia*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} m_k n_k (u^{(k)})^2 + \frac{3}{2} P^{(k)} \right] + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} m_k n_k (u^{(k)})^2 + \frac{3}{2} P^{(k)} \right) \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)} P^{(k)} \right. \\ \left. + \mathbf{u}^{(k)} \Pi^{(k)} + \mathbf{q}^{(k)} \right] - e_k n_k \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}^{(k)} = Q_k \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

dove  $Q_k = \int \frac{1}{2} m_k v^2 \left( \frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v}$  è il termine collisionale e il secondo termine è stato ottenuto sviluppando il valore medio  $n_k \langle v_i \left( \frac{1}{2} m_k v^2 \right) \rangle$  utilizzando, come prima, la decomposizione della velocità  $\mathbf{v}$  della singola particella ( $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ ). Si ottiene:

$$n_k \left\langle v_i \left( \frac{1}{2} m_k v^2 \right) \right\rangle = \left( \frac{1}{2} \rho (u^{(k)})^2 + \frac{3}{2} P^{(k)} \right) u_i + u_i P_{ij} + n \left\langle w_i \left( \frac{1}{2} m_k w^2 \right) \right\rangle$$

Se il gas obbedisce all'equazione di stato dei gas perfetti  $P = nkT$ , il termine  $\frac{3}{2}P$  è l'energia interna (per unità di volume) del gas  $\epsilon$ . Quindi, il primo termine a secondo membro rappresenta l'energia cinetica del moto ordinato più l'energia interna trasportate con la velocità ordinata, il secondo rappresenta il lavoro compiuto dalla forza di pressione e il terzo,

che indichiamo con  $\mathbf{q}^{(k)}$ , è detto *vettore flusso di calore* e rappresenta il flusso di energia interna trasportata con la velocità termica.

Il sistema di equazioni costituito dalle (A.5), (A.6), (A.9), accoppiate alle equazioni di Maxwell per  $\nabla \times \mathbf{E}$  e  $\nabla \times \mathbf{B}$  (le altre due equazioni di Maxwell sono da considerare come condizioni al contorno del problema) è il sistema di base per il *modello a due fluidi*. Tale sistema però non è chiuso infatti abbiamo per ciascun fluido 11 equazioni scalari nelle 19 incognite  $n$ ,  $P_{ij}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\Pi_{ij}$ ,  $\mathbf{q}$  ed è chiaro che nulla si guadagna scrivendo l'equazione dei momenti di ordine superiore al secondo. Infatti, facendolo, si vede che il numero di incognite aumenta più rapidamente di quello delle equazioni

Il problema della chiusura del sistema può essere ottenuta supponendo *collisionalità* in modo tale che ciascuno dei due fluidi sia in condizioni di *equilibrio termodinamico locale* con temperatura  $T_k(\mathbf{x}, t)$  in cui la funzione di distribuzione è una Maxwelliana:

$$f_{k0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n_k(\mathbf{x}, t) \left( \frac{m_k}{2\pi k T_k(\mathbf{x}, t)} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m_k [\mathbf{v} - \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}, t)]^2}{k T_k(\mathbf{x}, t)} \right) \quad (\text{A.10})$$

Tale condizione consente di trascurare i termini viscosi ( $\Pi_{ij} = 0$ ) e di conduzione di calore ( $q_i = 0$ ) e di rendere ciascun fluido isotropo ( $P_{ij} = P\delta_{ij}$ ) permettendo così di chiudere il sistema.

Rimangono però ancora da specificare i termini collisionali  $G_k$ ,  $\mathbf{R}^{(k)}$  e  $Q_k$ . Senza entrare nei particolari, è possibile far vedere che, qualunque sia il modello specifico di collisione, le leggi di conservazione del numero di particelle, dell'impulso totale e dell'energia totale in una collisione implicano il termine collisionale  $G^{(k)}$  è sempre nullo mentre i termini  $\mathbf{R}^{(k)}$  e  $Q_k$  sono diversi da zero solo tra particelle differenti e poichè in ogni collisione l'impulso e l'energia persi da una specie sono guadagnati dall'altra, si avrà

$$\mathbf{R}^{(e)} = -\mathbf{R}^{(p)} \quad \text{e} \quad Q_e = -Q_p \quad (\text{A.11})$$

Per risolvere il sistema bisogna quindi esprimere lo scambio di impulso ed energia tra le due specie tramite le variabili macroscopiche. L'espressione esplicita dei termini collisionali dipendono dal modello di collisione che si utilizza. Nel caso più semplice vengono modellizzati attraverso termini viscosi di Spitzer

Il sistema di equazioni del modello a due fluidi diventa:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}^{(k)}) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_k m_k \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla \cdot (n_k m_k \mathbf{u}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} + P^{(k)}) - e_k n_k \mathbf{E} - \frac{e_k n_k}{c} (\mathbf{u}^{(k)} \times \mathbf{B}) = \mathbf{R}^{(k)} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} m_k n_k (u^{(k)})^2 + \frac{3}{2} P^{(k)} \right] + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} m_k n_k (u^{(k)})^2 + \frac{5}{2} P^{(k)} \right) \mathbf{u}^{(k)} \right] - e_k n_k \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}^{(k)} = Q_k \quad (\text{A.14})$$

accoppiate alle equazioni di Maxwell per  $\nabla \times \mathbf{E}$  e  $\nabla \times \mathbf{B}$  ed è ora costituito, per ciascun fluido, da un sistema chiuso di 11 equazioni scalari nelle 11 incognite  $n$ ,  $P$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ .

## A.2 Modello a un fluido in regime MHD

Vediamo ora come, dall'ipotesi di **equilibrio termodinamico locale** anche tra le componenti protone-elettrone, è possibile passare dal modello a due fluidi ad un modello a un fluido, e poi come da qui, assumendo un **regime di basse frequenze**, si arriva al modello magnetoidrodinamico o MHD.

Per queste ulteriori semplificazioni partiamo introducendo le seguenti quantità che in qualche modo rappresentano l'insieme del plasma

$$\text{densità numerica} \longrightarrow N = n_p + n_e \simeq 2n_p \simeq 2n_e \quad (\text{A.15})$$

$$\text{densità di massa} \longrightarrow \rho = n_p m_p + n_e m_e \simeq n_p m_p \quad (\text{A.16})$$

$$\text{densità di carica} \longrightarrow q = n_p e - n_e e \simeq 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\text{pressione} \longrightarrow P = P_p + P_e \simeq 2P_p \simeq 2P_e = 2nkT \quad (\text{A.18})$$

$$\text{velocità media} \longrightarrow \mathbf{u} = \frac{n_p m_p \mathbf{u}^{(p)} + n_e m_e \mathbf{u}^{(e)}}{n_p m_p + n_e m_e} \simeq \mathbf{u}^{(p)} \quad (\text{A.19})$$

$$\text{densità di corrente} \longrightarrow \mathbf{J} = en_p \mathbf{u}^{(p)} - en_e \mathbf{u}^{(e)} \simeq ne(\mathbf{u}^{(p)} - \mathbf{u}^{(e)}) \quad (\text{A.20})$$

Nelle varie espressioni abbiamo tenuto conto della quasi neutralità di carica ( $n_p \simeq n_e$ ) e della forte disuguaglianza tra le masse  $m_p \gg m_e$ .

Sommando le equazioni di continuità, (A.12), delle due specie (moltiplicate per le rispettive masse) e tenendo conto della (A.16) e (A.19), si ottiene l'equazione di continuità della massa totale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.21})$$

Sviluppando il termine di divergenza, l'equazione di continuità può essere anche scritta nella forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.22})$$

Da qui si vede subito che un fluido incomprimibile ( $d\rho/dt = 0$ ) deve soddisfare la relazione  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Analogamente sommando le due equazioni del moto (A.13) corrispondenti alle due specie e, tenendo conto delle (A.11), (A.17), (A.19) e (A.20) si ottiene l'equazione del moto del fluido:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + P) - q \mathbf{E} - \frac{1}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Tenendo conto della (A.21), si verifica facilmente che l'equazione del moto può essere scritta nella forma

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{u} = -\nabla P + q \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.24})$$

Infine sommando le due equazioni dell'energia (A.14), si ottiene l'equazione dell'energia per il modello a un fluido

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} P\right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{5}{2} P\right) \mathbf{u}\right] - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.25})$$

Il termine  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  in questa equazione rappresenta il contributo dovuto all'*effetto Joule*. Tenendo conto della (A.24), si verifica facilmente che l'equazione per l'energia può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) (P \rho^{-\gamma}) = (q \mathbf{u} - \mathbf{J}) \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}\right) \quad (\text{A.26})$$

Il sistema di equazioni costituito dalle (A.21) [o (A.22)], (A.23) [o (A.24)], (A.25) [o (A.26)], accoppiate alle equazioni di Maxwell per  $\nabla \times \mathbf{E}$  e  $\nabla \times \mathbf{B}$  non è ancora un sistema chiuso (abbiamo 11 equazioni scalari nelle 14 incognite  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ). Le tre equazioni scalari mancanti per chiudere il sistema si ottengono facendo la differenza delle due equazioni del moto (A.13) corrispondenti alle due specie. Per raggiungere questo risultato, moltiplichiamo ciascuna delle equazioni per  $e_k/m_k$  e sommiamole, ciò che di fatto equivale a sottrarle a causa dell'opposto segno delle cariche. Osserviamo però che così facendo i termini collisionali  $\mathbf{R}^{(k)}$  non si elidono e che quindi bisogna esprimerli in termini delle variabili fondamentali del modello fluido. Eseguendo le operazioni

indicate avremo:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{J}) - \frac{e}{m_e} \nabla P^{(e)} - \frac{e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E} - \frac{e^2 n_e}{m_e m_p c} [(m_e \mathbf{u}^{(p)} + m_p \mathbf{u}^{(e)}) \times \mathbf{B}] = \frac{e \mathbf{R}^{(p)}}{m_e} \quad (\text{A.27})$$

Il fattore  $(m_e \mathbf{u}^{(p)} + m_p \mathbf{u}^{(e)})$  che compare nel termine che contiene il campo magnetico  $\mathbf{B}$  può essere riscritto tenendo conto delle definizioni (A.19) e (A.20) nel modo seguente:

$$(m_e \mathbf{u}^{(p)} + m_p \mathbf{u}^{(e)}) = (m_e + m_p) \mathbf{u} + (m_e - m_p) \frac{\mathbf{J}}{en_e} \simeq m_p \left( \mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{en_e} \right)$$

Rimane ancora da definire la relazione tra il termine collisionale,  $\mathbf{R}^{(k)}$  e le frangezze fluide. Una ragionevole ipotesi è quella di esprimere  $\mathbf{R}^{(k)}$  in termini della differenza di velocità delle due specie:

$$\mathbf{R}^{(k)} = -n_k m_k \nu_{k,k'} (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k')})$$

dove si è introdotto il parametro  $\nu_{k,k'}$  che rappresenta una frequenza media di collisione per le particelle della specie  $k$  con quelle della specie  $k'$ . In questa rappresentazione si considera che la forza che si esercita tra le due specie a causa delle collisioni sia essenzialmente di tipo viscoso e quindi che si annulli quando le velocità delle due specie coincidono. Poichè  $n_p \simeq n_e$ , la (A.11) implica che

$$m_e \nu_{e,p} = m_p \nu_{p,e}$$

Inserendo le varie espressioni nella (A.27) e moltiplicando per  $(m_e/n_e e^2)$  si ottiene infine:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{J}) \right) + \frac{1}{en_e c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{en_e} \nabla P^{(e)} \quad (\text{A.28})$$

dove abbiamo introdotto la quantità  $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu_{ep}$  che rappresenta la *conducibilità elettrica* del plasma.

Quindi il sistema di equazioni del modello a un fluido è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P + q \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (P \rho^{-\gamma}) = (q \mathbf{u} - \mathbf{J}) \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{J}) \right) + \frac{1}{en_e c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{en_e} \nabla P^{(e)} \quad (\text{A.32})$$

accoppiate alle equazioni di Maxwell per  $\nabla \times \mathbf{E}$  e  $\nabla \times \mathbf{B}$  ed è ora costituito da un sistema chiuso di 14 equazioni scalari nelle 14 incognite  $n$ ,  $P$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}$ .

In molti problemi che si presentano in fisica del plasma, e in particolare problemi di natura astrofisica, ci si mette nel cosiddetto *regime magnetoidrodinamico* o *MHD* che permette di semplificare ulteriormente il sistema fluido. Indicato con  $\mathcal{U}$  il valore tipico della velocità fluida, con  $\mathcal{L}$  la scala spaziale su cui si ha una variazione sensibile dei campi e con  $\tau$  la corrispondente scala temporale, le relazioni che definiscono il *regime MHD* sono:

$$\mathcal{U} \ll c \qquad \mathcal{U} = \frac{\mathcal{L}}{\tau} \qquad (\text{A.33})$$

La prima di queste relazioni ci dice semplicemente che ci limitiamo a situazioni non relativistiche. La seconda ci dice che consideriamo sistemi in cui la "velocità tipica" dei fenomeni *elettromagnetici*, che identifichiamo con  $\mathcal{L}/\tau$ , sia dello stesso ordine della velocità tipica dei fenomeni *idrodinamici*, definita da  $\mathcal{U}$ . In questa situazione, le due classi di fenomeni "vanno alla stessa velocità", ciò che rende massima l'interazione tra di essi.

Per vedere quali siano, in tale regime, le semplificazioni delle equazioni del modello a un fluido, eseguiamo un' *analisi dimensionale* indicando con  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{J}$  i valori caratteristici rispettivamente del campo elettrico, del campo magnetico, della densità di carica e della densità di corrente.

Consideriamo per primo l'analisi dimensionale per le equazioni di Maxwell per  $\nabla \times \mathbf{E}$  e  $\nabla \times \mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}} \simeq \frac{1}{c} \frac{\mathcal{B}}{\tau} &\implies \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \simeq \frac{\mathcal{U}}{c} \ll 1 \\ \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{L}} \simeq \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} + \frac{1}{c} \frac{\mathcal{E}}{\tau} &\implies 1 \simeq \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}} + \left(\frac{\mathcal{U}}{c}\right)^2 \end{aligned}$$

quindi il termine delle correnti di spostamento è trascurabile e l'equazione per  $\nabla \times \mathbf{B}$  diventa:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \qquad (\text{A.34})$$

Questo vuol dire che stiamo considerando un *regime di basse frequenze*. Infatti, la corrente di spostamento diventa importante solo quando le variazioni temporali di  $\mathbf{E}$  sono rapide, cioè in *regime di alte frequenze*.

Consideriamo ora l'equazione del moto (A.24):

$$\rho \frac{\mathcal{U}}{\tau} \simeq -\frac{P}{\mathcal{L}} + \mathcal{Q}\mathcal{E} + \frac{1}{c} \mathcal{J}\mathcal{B} \implies \frac{\mathcal{Q}\mathcal{E}}{\mathcal{J}\mathcal{B}/c} \simeq \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}\right)^2 \simeq \left(\frac{\mathcal{U}}{c}\right)^2 \ll 1$$

dove abbiamo sostituito  $\mathcal{J}$  con il risultato dell'analisi dimensionale dell'equazione (A.34) ( $\mathcal{B}/\mathcal{L} \simeq 4\pi/c\mathcal{J}$ ) e  $\mathcal{Q}$  con quello dell'equazione per  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  ( $\mathcal{E}/\mathcal{L} \simeq 4\pi\mathcal{Q}$ ). Quindi l'equazione del moto in regime MHD si può scrivere:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.35})$$

Per stimare l'importanza relativa dei termini che compaiono nell'equazione di Ohm (A.32), immaginiamo di fare un'analisi dimensionale e di dividere tutti i termini per il valore caratteristico del campo elettrico. Osserviamo per prima cosa che i due termini in parentesi quadra hanno lo stesso ordine di grandezza. Prendendo poi i termini nell'ordine in cui compaiono nell'equazione e confrontandoli, avremo:

$$1 : 1 : \left( \frac{\omega}{\omega_{pe}} \right) \left( \frac{\nu_{ei}}{\omega_{pe}} \right) \left( \frac{c}{\mathcal{U}} \right)^2 : \left( \frac{\omega}{\omega_{pe}} \right) \left( \frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}} \right) \left( \frac{c}{\mathcal{U}} \right)^2 : \left( \frac{\omega}{\omega_{pe}} \right)^2 \left( \frac{c}{\mathcal{U}} \right)^2 : \left( \frac{\omega}{\omega_{cp}} \right)^2 \left( \frac{c_s}{\mathcal{U}} \right)^2$$

dove  $\omega \simeq \tau^{-1}$ ,  $c_s \simeq (P/\rho)^{1/2}$ ,  $\omega_{pe}$  è la frequenza degli elettroni,  $\omega_{ce}$  e  $\omega_{cp}$  sono rispettivamente le frequenze di ciclotrone degli elettroni e dei protoni e  $\nu_{ep}$  è la frequenza di collisione tra elettroni e protoni. Quindi è necessario che:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega}{\omega_{pe}} \right) &\ll \frac{\mathcal{U}}{c} \quad \text{per trascurare i termini in parentesi quadra} \\ \left( \frac{\omega \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} \right) &\ll \left( \frac{\mathcal{U}}{c} \right)^2 \quad \text{per trascurare il termine proporzionale a } \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ \left( \frac{\omega}{\omega_{cp}} \right) &\ll \left( \frac{\mathcal{U}}{c} \right)^2 \quad \text{per trascurare il termine che contiene la pressione elettronica} \end{aligned}$$

Quando tutte queste condizioni sono soddisfatte e ciò succede nel regime di basse frequenze proprie del regime MHD, l'equazione di Ohm (A.32) si riduce alla semplice forma

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \quad (\text{A.36})$$

detta equazione di Ohm per un *plasma resistivo*. Se inoltre vale la condizione  $(\omega \nu_{ep}/\omega_{pe}^2) \ll (\mathcal{U}/c)^2$ , che corrisponde ad avere una conducibilità elettrica molto alta, anche il termine a secondo membro della (A.36) può essere trascurato e tale equazione prende la forma che caratterizza un *plasma ideale*:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.37})$$

Infine, l'equazione per l'energia (A.26), tenendo conto che  $\mathcal{Q}\mathcal{E}/\mathcal{E} \simeq (\mathcal{U}/c)^2$ , può essere scritta nella forma:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (P \rho^{-\gamma}) = \frac{J^2}{\sigma} \quad (\text{A.38})$$

Le equazioni fondamentali del modello ad un fluido in regime MHD sono dunque la (A.29), (A.35), (A.38) e la (A.34) a cui vanno aggiunte le uniche equazioni che ancora contengono il campo elettrico e cioè

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\sigma}\end{aligned}$$

Questo suggerisce di applicare l'operatore  $\nabla \times$  all'equazione di Ohm e di eliminare il campo elettrico utilizzando l'equazione per il  $\nabla \times \mathbf{E}$ . Così facendo e ricordando che  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla \eta \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.39})$$

Questa equazione viene detta *equazione dell'induzione magnetica* o anche *equazione di Faraday* e consente di ridurre ulteriormente il numero di equazioni del modello MHD

Riassumendo, le *equazioni MHD resistive*, tenendo conto della (A.34), sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (P \rho^{-\gamma}) = \frac{4\pi}{c^2} \eta J^2 \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{A.43})$$

Qui abbiamo assunto una resistività costante cioè indipendenti dalle variabili termodinamiche.

Le equazioni MHD ideali si ottengono nel limite di conducibilità infinita, cioè ponendo  $\eta = 0$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.44})$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (\text{A.45})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (P \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.47})$$

## Appendice B

# Metodo dei modi normali

L'analisi di stabilità lineare parte da un sistema di equazioni differenziali che descrive la dinamica del sistema fisico che si vuole studiare. A queste equazioni si applica un' *analisi perturbativa lineare* che consiste nel considerare uno stato di equilibrio e sottoporlo a una perturbazione lineare. Questo conduce a un sistema di equazioni linearizzate.

Il sistema di equazioni differenziali omogeneo lineare nello spazio  $(\mathbf{x}, t)$  possiamo scriverlo simbolicamente nella forma:

$$\mathbf{D}(\nabla, \partial/\partial t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

dove  $\mathbf{D}$  è un tensore ed  $\mathbf{f}$  il vettore che rappresenta l'insieme delle grandezze perturbate del nostro sistema fisico. Trattandosi di un sistema lineare vale il *principio di sovrapposizione* ed è quindi possibile rappresentare le grandezze perturbate  $\mathbf{f}$  come la somma di onde piane di Fourier  $\propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$  e studiare l'evoluzione separatamente per ciascuna componente: la soluzione sarà la somma delle singole evoluzioni.

Vediamo prima brevemente cosa vuol dire utilizzare una rappresentazione di Fourier considerando per semplicità una generica funzione scalare  $f(\mathbf{x}, t)$  (il risultato può essere generalizzato a grandezze vettoriali). La trasformata di Fourier di  $f(\mathbf{x}, t)$  è definita da

$$f_k(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{x} dt \quad (\text{B.2})$$

e  $f(\mathbf{x}, t)$ , detta *antitrasformata di Fourier* della  $f_k(\mathbf{k}, \omega)$ , può essere scritta come:

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \quad (\text{B.3})$$

dove  $\mathbf{k}$  e  $\omega$  sono quantità reali. Dalla (B.3) si vede subito il significato fisico della trasformata di Fourier: la funzione data viene considerata come una sovrapposizione di *onde elementari* caratterizzate da un'ampiezza  $f_k(\mathbf{k}, w)$  e una fase  $\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k - \frac{\omega}{k}t)$ . I piani  $\Phi = \text{costante}$  si muovono dunque nella direzione di  $\mathbf{e}_k$  con velocità

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k \quad (\text{B.4})$$

Tornando al nostro problema di risolvere un sistema lineare e generalizzando la rappresentazione di Fourier a grandezze vettoriali, quello che si fa è di supporre che  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  definito in modo analogo alla (B.3), sia la soluzione del sistema lineare (B.1). Ci si rende subito conto che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega \mathbf{f}_k) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \\ \nabla \mathbf{f} &= \int_{-\infty}^{\infty} (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_k) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \end{aligned}$$

Dunque nello spazio di Fourier gli operatori  $\nabla$  e  $\partial/\partial t$  sono semplicemente i moltiplicatori  $i\mathbf{k}$  e  $-i\omega$  (questo risultato vale anche per applicazioni ripetute di tali operatori  $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$  e  $\nabla^2 \rightarrow -\mathbf{k}^2$  e così via).

Di conseguenza il sistema nello spazio ordinario  $(\mathbf{x}, t)$  (B.1) diventa nello spazio di Fourier  $(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\mathbf{D}(i\mathbf{k}, -i\omega) \mathbf{f}_k(\mathbf{k}, w) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Nello spazio di Fourier dobbiamo quindi risolvere un sistema di equazioni *algebriche* invece di un sistema di equazioni *differenziali* che rappresenta un grande vantaggio.

La condizione per avere soluzioni non identicamente nulle della (B.5) è

$$\text{Det} [\mathbf{D}(i\mathbf{k}, -i\omega)] = 0 \quad (\text{B.6})$$

Questa è detta *relazione di dispersione*, stabilisce il legame tra  $\omega$  e  $\mathbf{k}$  di cui avevamo bisogno. In generale, la relazione di dispersione possiede un numero finito di soluzioni discrete (dette *modi normali*):

$$\omega = \omega_\alpha(\mathbf{k}) \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.7})$$

Ad ogni soluzione della relazione di dispersione è associato un *autovettore*  $\mathbf{f}_k(\mathbf{k}, w)$  che caratterizza quel particolare modo di propagazione. Possiamo

introdurre formalmente la condizione  $\mathbf{D}(i\mathbf{k}, -i\omega)\mathbf{f}_k(\mathbf{k}, w) = 0$  nella (B.3) scrivendo:

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{k}, w) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{f}_{k\alpha}(\mathbf{k}) \delta[\omega - \omega_\alpha(\mathbf{k})]$$

con le  $\omega_\alpha$  date dalla (B.7). Eseguendo l'integrale in  $d\omega$  nella (B.3) troviamo che la soluzione generale del nostro problema può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_N^{\alpha=1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{k\alpha}(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_\alpha(\mathbf{k})t]} d\mathbf{k} \quad (\text{B.8})$$

La relazione di dispersione (B.6) ci da informazioni su quali onde lineari possono oscillare nel sistema fisico che si sta studiando permettendoci così di stabilire se la soluzione (B.8) è stabile o no cioè se oscilla, cresce o decade nel tempo. Vediamo in che modo si stabilisce questo.

In generale, la frequenza  $\omega$  può essere un numero complesso  $\omega = \omega_R + i\omega_I$ . Scriviamo allora le componenti di Fourier piane nella forma

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega_R t} e^{\omega_I t}$$

Da qui si vede chiaramente che il tipo di onda dipende dal valore della parte immaginaria:

- $\omega_I > 0 / \omega_I < 0$  - l'ampiezza dell'onda è moltiplicata per un fattore di crescita/decadimento esponenziale ( $e^{\omega_I t}$ ) e in tal caso l'onda oscilla con ampiezza crescente/decrescente nel tempo.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{f}_k(\mathbf{k}) e^{\omega_I t}}_{\text{ampiezza}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_R t)} \quad (\text{B.9})$$

Nel caso in cui la frequenza sia puramente immaginaria ( $\omega_R = 0$ ) l'onda non è di tipo oscillatorio, ma abbiamo un onda con ampiezza che cresce/decresce monotonicamente nel tempo.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{f}_k(\mathbf{k}) e^{\omega_I t}}_{\text{ampiezza}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{B.10})$$

Quindi non appena troviamo **un** particolare modo  $\omega_\alpha(\mathbf{k})$  con la parte immaginaria negativa, l'equilibrio è instabile

- $\omega_I = 0$  - l'ampiezza dell'onda è moltiplicata per un fattore che oscilla nel tempo ( $e^{-i\omega_R t}$ ).

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{f}_k(\mathbf{k})}_{\text{ampiezza}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_R t)} \quad (\text{B.11})$$

Quindi le perturbazioni ondose non determinano un cambiamento dell'equilibrio ma solo oscillazioni intorno a un minimo di energia del sistema. Comunque per affermare che la soluzione è stabile verso perturbazioni di piccola ampiezza **tutti** i modi  $\omega_\alpha(\mathbf{k})$  devono essere reali.

# Bibliografia

- [1] Balbus,S.A., & Hawley, J.F. 1991, ApJ, 376,214
- [2] Balbus,S.A., & Hawley, J.F. 1998, Rev. Mod. Phys., 701-53
- [3] Chandrasekhar,S.1960, Proc.Nat.Acad.Sci.,46,53
- [4] Hawley,J.F., Gammie,C.F., & Balbus,S.A. 1995, ApJ, 440:742-63
- [5] Hawley,J.F., Gammie,C.F., & Balbus,S.A. 1996, ApJ, 464:690-703
- [6] Hawley,J.F. 2000, ApJ, 528:462-79
- [7] Hawley,J.F. 2001, ApJ, 554:534-47
- [8] Lin,D.N.C., & Papaloizou,J.C.B. 1996, Annual Rev. Astron. Astrophys. 34, 703
- [9] Londrillo P. & DelZanna L. JCP, 2004
- [10] Lynden-Bell, D., & J.E. Pringle, 1974, Mon. Not. R. Astron. Soc. 168, 603
- [11] Okada,R., Fukue,J., & Matsumoto, R. 1989, PASJ, 41, 133
- [12] Papaloizou,J.C.B. & Pringle J.E. 1984, MNRAS 208:721-50
- [13] Pringle, J. E., 1981, Annu. Rev. Astron. Astrophys 19,137
- [14] Shakura, N. I., & R. A. Sunyaev, 1973, Astron. Astrophys. 24, 337
- [15] Tassoul, J.L. 1978, Theory of Rotating Stars (Princeton Univ. Press)
- [16] Velikhov, E.P.1959, Soviet Phys. JETP, 36, 995



# RINGRAZIAMENTI

Prima di ogni altro vorrei ringraziare Pasquale Londrillo, per il tempo, la pazienza, le 'attese!', ecc. ecc. ecc. che mi ha dedicato ma soprattutto per avermi indicato la strada su come si porta avanti una simulazione numerica.

Un grazie va anche al prof. Ciotti per i suoi consigli e a Carlo Nipoti per la sua disponibilità.

Ringrazio anche famiglia, amici e conoscenti per avermi sostenuto in questo ultimo periodo.

Grazie! Grazie! Grazie!